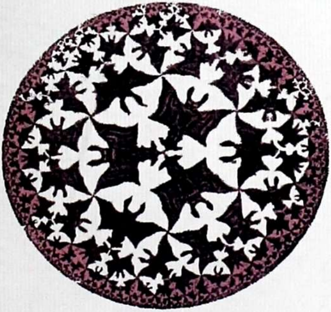
А.А.Борубаев, Г.Матиева

Көп түспөлдүүлүктөрдүн геометриясына киришүү



Ош-2011

УДК 514
ББК 22.151
Б 83

Окуу колдонмосу Ош мамлекеттик университетинин Окумуштуулар кеңешинин чечими боюнча басмага сунушталган

Рецензенттер:

- Ж. Баласагын атындагы Кыргыз Улуттук Университетинин алгебра жана геометрия кафедрасы (кафедра башчысы физ. – мат. илимдеринин доктору, проф. Чекеев А.А.),
- физ. – мат. илимдеринин доктору, проф. Алыбаев К.С.

Б 83 Борубаев А. А., Матиева Г. Көп түспөлдүүлүктөрдүн геометриясына киришүү: Окуу колдонмо. – Ош: 2011. – б.

ISBN 978-9967-03-688-8

Окуу колдонмосу . университеттердин «математика» жана «колдонмо математика жана информатика» адистиктери боюнча окуган IV, V курстардын студенттери, аспиранттар, жана жаш окутуучулар үчүн даярдалган.

Мукабада: М. Эшер, Пределдик айлана. Жыгачтагы эки түстүү граврюра, 1960.

Б 1602050000-11

УДК 514
ББК 22.151

ISBN 978-9967-03-688-8

Кириш сөз

Жылма көп түспөлдүүлүктөрдүн теориясы геометриянын эмес, дифференциалдык топологиянын предмети экендиги талашсыз. Бирок, азыркы учурдагы дифференциалдык геометрия кошумча түзүлүштөр менен байытылган дифференцирленүүчү көп түспөлдүүлүктөрдү изилдейт. Ошондуктан, дифференциалдык геометриянын актуалдуу проблемаларын изилдөөнү максат кылган окурман үчүн бул окуу колдонмону өздөштүрүү алгачкы кадам болуп эсептелет. Колдонмонун биринчи бөлүгүндө жылма көп түспөлдүүлүктөр жана чагылтуулар жөнүндө негизги маалыматтар берилген.

Экинчи бөлүгүндө дифференциалдык геометриянын актуалдуу проблемаларын изилдөөнүн негизги методдорунун бири болгон Картандын сырткы дифференциалдык формалар методунун элементтери, тензорлор жана тензордук катмарланыш, бөлүштүрүүлөр жана аффиндик, евклиддик мейкиндиктердин структуралык теңдемелери жөнүндө баяндалган.

Үчүнчү бөлүгүндө R^3 мейкиндигиндеги дифференциалдык формалар, алардын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар жана бул мейкиндиктеги кээ бир беттердин дифференцирленүүчү көп түспөлдүүлүк катары аныкталыштары камтылган.

Окуу колдонмосу университеттердин «математика» жана «колдонмо математика жана информатика» адистиктери боюнча окуган IV, V курстардын студенттери, аспиранттар, жана жаш окутуучулар үчүн даярдалган. Аталган адистиктер боюнча жогорку курстарда өтүлүүчү «атайын курс» жана «атайын семинар» сабактары үчүн негизги адабият катары сунуштоого болот.

Окурман колдонмодогу материалды ийгиликтүү өздөштүрүүсү үчүн топологиянын элементтерин, евклиддик мейкиндиктеги сызыктар жана беттер теорияларын өздөштүргөн болушу абзел.

Авторлор

I Глава. ЖЫЛМА КӨПТҮСПӨЛДҮҮЛҮКТӨР

§1. Көптүспөлдүүлүктүн аныктоосу. Жылма көптүспөлдүүлүктөр.

R^n – n ченемдүү сандык мейкиндик, ал эми G – андагы ачык көптүк болсун.

$f : G \to R^p$ чагылтуусу ар бир $x = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in G$ чекитине анык бир $f(x) = y = \left(y^1, y^2, ..., y^p\right) \in R^p$ чекитин тиешелештикке коет. Демек, f чагылтуусу p сандагы $y^i = y^i\left(x^1, x^2, ... x^n\right)$ функциялары менен аныкталат. Бул функциялар f чагылтуусунун компоненталары деп аталат.

Эгерде y^i функцияларынын ар бири G көптүгүндө k – тартипке чейинки (k – тартиптегиси да) үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болсо, анда f чагылтуусу C^k ***жылмакайлык классына таандык чагылтуу*** же жөн эле C^k ***классына таандык чагылтуу*** деп аталат жана $f \in C^k\left(G, R^p\right)$ көрүнүшүндө же кыскача $f \in C^k$ түрүндө жазылат (эгерде G жана p белгилүү болсо).

Эгерде f чагылтуусунун y^i компоненталары G көптүгүндө каалагандай тартипке чейинки үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болушса, анда f чагылтуусу $C^\infty\left(G, R^p\right)$ ***классына таандык чагылтуу*** деп аталат. Ал эми аналитикалык чагылтуулардын (G көптүгүн R^p көптүгүнө) көптүгү, б. а. компоненталарын ар бир $x \in G$ чекитинин чеке-белинде жыйналуучу даражалуу катарга ажыратуу мүмкүн боло тургандай чагылтуулардын көптүгү $C^{\omega}\left(G, R^p\right)$ көрүнөшүндө белгиленет. $C^o\left(G, R^p\right)$ аркылуу G көптүгүн R^p көптүгүнө үзгүлтүксүз чагылтуулардын көптүгү белгиленет. Төмөндөгүлөргө ээ болобуз:

$$C^o\left(G, R^p\right) \supset C^l\left(G, R^p\right) \supset \ldots \supset C^{\infty}\left(G, R^p\right) \supset C^{\omega}\left(G, R^p\right).$$

Мындагы бир дагы камтылуу барабардык боло албай тургандыгын көрсөтүүгө болот.

X – хаусдорфтук топологиялык мейкиндик болсун. $U \subset X$ ачык көптүгүн R^n мейкиндигиндеги ачык көптүккө гомеоморфтук чагылтуу ***n – ченемдүү карта*** же ***n – ченемдүү координаталар системасы*** деп аталат. U көптүгүн $\varphi: U \to R^n$ картасынын ***аймагы*** же ***координаталык чеке-бели*** деп аташат. Эгерде $x \in U$ болсо, анда $\varphi(x) = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \in R^n$ болот. x^i чыныгы сандары x ***чекитинин*** φ ***картасындагы координаталары*** деп аталышат. Эгерде $x \in U$ (мында U - φ картасынын аймагы) болсо, анда φ гомеоморфизми x ***чекитиндеги координаталар системасы*** деп аталат.

Эгерде X топологиялык мейкиндиги төмөндөгүдөй шарттарды канааттандырса:

1) X – хаусдорфтук топологиялык мейкиндик болсо;

2) n – ченемдүү карталардын координаталык чеке-белдеринен түзүлгөн каптоосу жашаса (n – берилген натуралдык сан): $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, мында $U_\alpha - \varphi$ картасынын чеке-бели, A - индекстердин көптүгү;

анда X топологиялык мейкиндиги ***n – ченемдүү топологиялык көптүспөлдүүлүк*** деп аталат.

Геометрияда жогорудагы шарттардан сырткары (көптүспөлдүүлүктүн мындай аныктоосу өтө эле жалпыланган түрдөгү аныктоо болуп калат) X топологиялык мейкиндигине башка дагы шарттар коюлат: байланыштуулук жана санаттык базага ээ болуучулук.

X көптүспөлдүүлүгү санаттык базага ээ болсун дейли, б.а. B – X көптүгүнүн ачык көптүктөрүнүн системасы болсун жана бул система төмөндөгүдөй шартты канааттандырсын: каалаган $x \in X$ чекити жана бул чекиттин каалаган V_x чеке-бели үчүн $B_x \in B$ ачык көптүгү жашап, $x \in B_x \subset V_x$ орун алсын. Ушундай B системасы X мейкиндигинин топологиясынын ***базасы*** деп аталат. Эгерде B системасы санаттык сандагыдан ашпаган B_x элементтерди кармап турса, анда ал ***санаттык база*** деп аталат. Ал эми X мейкиндиги болсо ***санаттык базалуу*** же ***санаттык базасы бар топологиялык мейкиндик*** деп аталат. B базасы менен берилген мейкиндикте ар кандай U_α ачык көптүгү B дан алынган элементтердин биригүүсү боло тургандыгы белгилүү. Ошондуктан, эгерде X көптүспөлдүүлүгүнүн топологиясы санаттык базага ээ болсо, анда $\{U_\alpha\}$ каптоосу санаттык сандагыдан ашып кетпеген U_α элементтерди кармап турат деп эсептөөгө болот (б.а. A көптүгүнүн элементтери санаттык сандагыдан ашып кетпейт).

$X - n$ ченемдүү топологиялык көптүспөлдүүлүк, k – бүтүн сан $(0 \leq k \leq \infty)$ болсун. Карталардын $\mathscr{A} = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ көптүгүн карайлы.

Эгерде төмөндөгү эки шарт орун алса (C^k классындагы атластын аксиомалары):

1) φ_α карталарынын чеке-белдери X көптүспөлдүүлүгүнүн каптоосун түзүшсө, б.а.

$$X \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha;$$

2) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ боло тургандай каалагандай $\alpha, \beta \in A$ үчүн

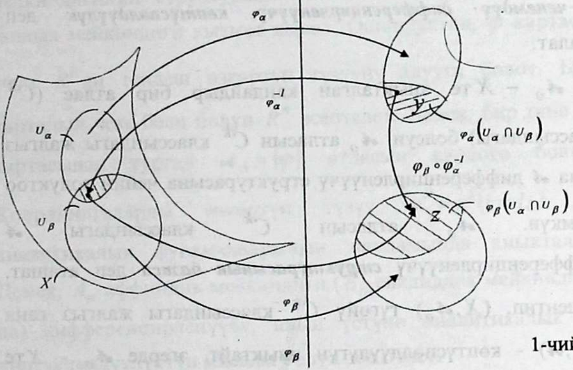
$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

чагылтуусу C^k классына таандык болсо, анда $\mathscr{A}$ көптүгү X көптүспөлдүүлүгүндө аныкталган C^k классындагы ***атлас*** деп аталат.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ чагылтуулары ***координаталарды өзгөртүүлөр*** деп аталышат.

$\mathscr{A}$ – X көптүспөлдүүлүгүндөгү C^k классына таандык атлас болсун. Бул көптүспөлдүүлүктөгү φ картасын карайлы.

Эгерде $\mathcal{A}\bigcup\{\varphi\}$ көптүгү да X көптүспөлдүүлүгүндө C^k классындагы атлас болсо, анда φ картасы $\mathcal{A}$ атласы менен «C^k-макулдашылган» деп айтышат.



1-чийме.

Эгерде $\mathcal{A}$ атласы менен C^k-макулдашылган ар бир карта $\mathcal{A}$ атласына таандык болсо, анда $\mathcal{A}$ атласы X көптүспөлдүүлүгүндө аныкталган, C^k классындагы ***дифференцирленүүчү структура*** (же ***максималдык атлас***) деп аталат.

C^k классындагы ар бир атлас X көптүспөлдүүлүгүндө C^k классындагы дифференцирленүүчү структураны бир маанилүү аныктайт, б.а. өзү менен C^k - макулдашылган бардык карталардын көптүгүн аныктайт.

$(X,\mathscr{A})$ түгөйү ($X - n -$ ченемдүү топологиялык көптүспөлдүүлүк, $\mathscr{A} - X$те аныкталган, C^k классындагы дифференцирленүүчү структура) C^k классындагы, ***$n-$ченемдүү дифференцирленүүчү көптүспөлдүүлүк*** деп аталат.

$\mathscr{A}_o - X$те аныкталган кандайдыр бир атлас (C^k классындагы) болсун. $\mathscr{A}_o$ атласын C^k классындагы жалгыз гана $\mathscr{A}$ дифференцирленүүчү структурасына чейин толуктоо мүмкүн. $\mathscr{A}_o$ атласын C^k классындагы $\mathscr{A}$ дифференцирленүүчү ***структурасынын базиси*** деп аташат. Ошентип, $(X,\mathscr{A}_o)$ түгөйү C^k классындагы жалгыз гана $(X,\mathscr{A})$ - көптүспөлдүүлүгүн аныктайт, эгерде $\mathscr{A}_o$ - Xте аныкталган кандайдыр бир C^k- атлас болсо. C^o –көптүспөлдүүлүк – бул жөн эле топологиялык көптүспөлдүүлүк экендигин байкайбыз.

Эгерде жогорудагы C^k классындагы атластын аныктоосундагы $k=\omega$ деп алсак (б.а. $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ чагылтууларын аналитикалык чагылтуулар деп эсептесек), анда C^ω классындагы атласка ээ болобуз. C^ω классындагы максималдык $\mathscr{A}$ атласы Xте аныкталган ***аналитикалык структура*** деп аталат. Ал эми $(X,\mathscr{A})$ түгөйү - ***аналитикалык көптүспөлдүүлүк*** деп аталат.

$C^k(k>0)$ классындагы көптүспөлдүүлүктөр ***жылма көптүспөлдүүлүктөр*** деп да аталышат.

1-мисал. A_n аффиндик мейкиндигин карайлы. A_n мейкиндигинин структурасын аныктоодо база болуп R^n сандык мейкиндиги кызмат кылат. Ошондуктан, φ картасы үчүн R^nди теңдеш өзгөртүп түзүүнү алууга болот. Бул картанын чеке-бели болуп R^n эсептелет. Демек, бир гана φ картасынан турган $\mathcal{A}_o=\{\varphi\}$ атласын кароого болот. Координаталарды өзгөртүп түзүү $y^i=x^i(i=1,2,...,n)$ аналитикалык функцияларынын жардамында аныкталат. Демек, A_n аффиндик мейкиндиги (E_n евклиддик мейкиндиги да) дифференцирленүүчү, анын үстүнө аналитикалык да көптүспөлдүүлүктүн мисалы болуп эсептелет.

2-мисал. E_n евклиддик мейкиндигинде S_{n-1} сферасын карайлы: $S_{n-1}=\{x\in E_n|\rho(0,x)=r>0\}$ жана $x_1(0,0,...,0,r)$, $x_2(0,0,...,0,-r)$ чекиттерин, $E_{n-1}:x^n=0$ - гипертегиздигин алалы (E_n мейкиндигинде $\{0,\vec{i}_1,\vec{i}_2,...,\vec{i}_n\}$ ортонормаланган репери тандалып алынган деп эсептейли). Төмөндөгүдөй чагылтууларды аныктайбыз:

$$\varphi: S_{n-1}\setminus\{x_1\}\to E_{n-1}, \quad \psi: S_{n-1}\setminus\{x_2\}\to E_{n-1}.$$

Мында φ – x_1 чекитинен сфераны E_{n-1} тегиздигине стереографиялык проекциялоо; ал эми ψ – x_2 чекитинен сфераны E_{n-1} тегиздигине стереографиялык проекциялоо.

$(X,\mathscr{A})$ түгөйү ($X - n -$ ченемдүү топологиялык көптүспөлдүүлүк, $\mathscr{A} - X$те аныкталган, C^k классындагы дифференцирленүүчү структура) C^k классындагы, ***$n-$ченемдүү дифференцирленүүчү көптүспөлдүүлүк*** деп аталат.

$\mathscr{A}_o - X$те аныкталган кандайдыр бир атлас (C^k классындагы) болсун. $\mathscr{A}_o$ атласын C^k классындагы жалгыз гана $\mathscr{A}$ дифференцирленүүчү структурасына чейин толуктоо мүмкүн. $\mathscr{A}_o$ атласын C^k классындагы $\mathscr{A}$ дифференцирленүүчү ***структурасынын базиси*** деп аташат. Ошентип, $(X,\mathscr{A}_o)$ түгөйү C^k классындагы жалгыз гана $(X,\mathscr{A})$ - көптүспөлдүүлүгүн аныктайт, эгерде $\mathscr{A}_o$ - Xте аныкталган кандайдыр бир C^k- атлас болсо. C^o –көптүспөлдүүлүк – бул жөн эле топологиялык көптүспөлдүүлүк экендигин байкайбыз.

Эгерде жогорудагы C^k классындагы атластын аныктоосундагы $k=\omega$ деп алсак (б.а. $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ чагылтууларын аналитикалык чагылтуулар деп эсептесек), анда C^ω классындагы атласка ээ болобуз. C^ω классындагы максималдык $\mathscr{A}$ атласы Xте аныкталган ***аналитикалык структура*** деп аталат. Ал эми $(X,\mathscr{A})$ түгөйү - ***аналитикалык көптүспөлдүүлүк*** деп аталат.

$C^k(k>0)$ классындагы көптүспөлдүүлүктөр ***жылма көптүспөлдүүлүктөр*** деп да аталышат.

1-мисал. A_n аффиндик мейкиндигин карайлы. A_n мейкиндигинин структурасын аныктоодо база болуп R^n сандык мейкиндиги кызмат кылат. Ошондуктан, φ картасы үчүн R^nди теңдеш өзгөртүп түзүүнү алууга болот. Бул картанын чеке-бели болуп R^n эсептелет. Демек, бир гана φ картасынан турган $\mathcal{A}_o=\{\varphi\}$ атласын кароого болот. Координаталарды өзгөртүп түзүү $y^i=x^i(i=1,2,...,n)$ аналитикалык функцияларынын жардамында аныкталат. Демек, A_n аффиндик мейкиндиги (E_n евклиддик мейкиндиги да) дифференцирленүүчү, анын үстүнө аналитикалык да көптүспөлдүүлүктүн мисалы болуп эсептелет.

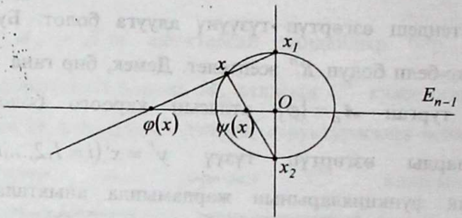
2-мисал. E_n евклиддик мейкиндигинде S_{n-1} сферасын карайлы: $S_{n-1}=\{x\in E_n|\rho(0,x)=r>0\}$ жана $x_1(0,0,...,0,r)$, $x_2(0,0,...,0,-r)$ чекиттерин, $E_{n-1}:x^n=0$ - гипертегиздигин алалы (E_n мейкиндигинде $\{0,\vec{i}_1,\vec{i}_2,...,\vec{i}_n\}$ ортонормаланган репери тандалып алынган деп эсептейли). Төмөндөгүдөй чагылтууларды аныктайбыз:

$$\varphi: S_{n-1}\setminus\{x_1\}\rightarrow E_{n-1},\quad \psi: S_{n-1}\setminus\{x_2\}\rightarrow E_{n-1}.$$

Мында $\varphi - x_1$ чекитинен сфераны E_{n-1} тегиздигине стереографиялык проекциялоо; ал эми $\psi - x_2$ чекитинен сфераны E_{n-1} тегиздигине стереографиялык проекциялоо.

$\mathcal{A}_o = \{\varphi, \psi\}$ – S_{n-1} сферасындагы дифференцирленүүчү структуранын базиси болуп эсептелет.

Γ_{n-1} – E_n мейкиндигиндеги эллипсоид (x_o – анын борбору), S_{n-1} – борбору x_o чекити болгон, r радиустуу сфера болсун.



2 - чийме.

$f : S_{n-1} \to \Gamma_{n-1}$ чагылтуусун $f(x) = [x_o, x) \cap \Gamma_{n-1}$ $(\forall x \in S_{n-1})$ закону боюнча аныктайлы. Бул чагылтуу S_{n-1} сферасында аныкталган дифференцирленүүчү структураны Γ_{n-1} эллипсоидине которот. Демек, Γ_{n-1} эллипсоиди да дифференцирленүүчү (C^{∞} классындагы) көптүспөлдүүлүк болот.

3-мисал. P_n проективдүү мейкиндигин карайлы. Бул мейкиндиктин модели болуп $(n+1)$ – ченемдүү аффиндик мейкиндиктеги түз сызыктардын O борборлуу байламтасы $\varepsilon(0)$ эсептелет.

A_{n+1} мейкиндигинде кандайдыр бир Γ_n эллипсоидин алабыз (O борборлуу). $f : \Gamma_n \to \varepsilon(0)$ чагылтуусун $\forall x \in \Gamma_n$:

$f(x)=(O,x)$ закону боюнча аныктайлы. Бул чагылтуу Γ_n эллипсоидинде аныкталган дифференцирленүүчү структураны $\mathcal{E}(0)$ көптүгүнө которот. Демек, P_n проективдүү мейкиндиги да C^{∞}-көптүспөлдүүлүк болот экен.

Ушуга эле окшош, Римандын эллиптикалык мейкиндиги S_n, Лобачевскийдин гиперболикалык мейкиндиги Λ_n да C^{∞} көптүспөлдүүлүктөр болуша тургандыгын көрсөтүүгө болот.

Эскертүү1.1. Эгерде X топологиялык көптүспөлдүүлүгүндө C^1 –структура жашаса, анда ал көптүспөлдүүлүктө C^{ω}- структура да жашай тургандыгын, анын үстүнө максималдык C^1 –атласынан C^{ω}-макулдашылган карталардын атласын (б.а. C^{ω} –структуранын базисин) тандап алууга боло тургандыгын 1936-жылы Уитни далилдеген [8].

Ошондуктан, геометриянын көптөгөн маселелерин изилдөөдө C^{∞}- көптүспөлдүүлүктөрү каралат. Дароо эле C^{∞}-көптүспөлдүүлүктөрүн кароо мүмкүн эле. Бирок, көптүспөлдүүлүктүн аналитикалык көптүспөлдүүлүк болуу шарты өтө эле күчтүү талап болуп эсептелет.

Бардык $n \geq 10$ үчүн эч кандай C^k $(k>0)$ структураны аныктоо мүмкүн болбой турган $n-$ ченемдүү топологиялык көптүспөлдүүлүктөрдүн жашашын 1960-жылы Кервер далилдеген. Эгерде $X-$ $n \leq 4$ ченемдүү топологиялык көптүспөлдүүлүк болсо, анда X те C^k –структура $(k > 0)$ жашай тургандыгын көрсөтүүгө болот. [8].

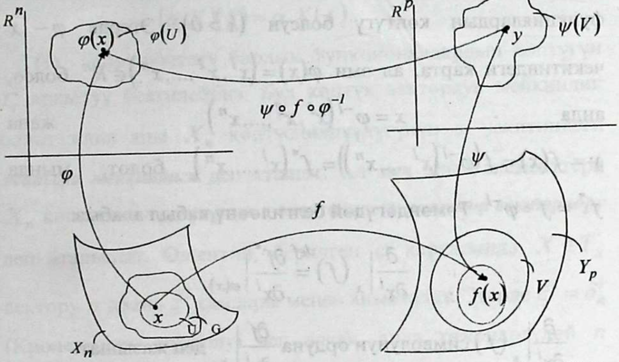
n – ченемдүү дифференцирленүүчү көптүспөлдүүлүктөрдү $X_n, Y_n, ..., M_n$ аркылуу белгилейбиз. Каралып жаткан көптүспөлдүүлүк кандай C^k классына таандык экендигин көрсөтпөйбүз, себеби ой жүгүртүүлөрдүн бардыгы туура болсун үчүн k ны жетиштерлик чоң деп эсептейбиз. Ар кандай C^k –көптүспөлдүүлүк C^p –көптүспөлдүүлүк да $(p < k)$ боло тургандыгы түшүнүктүү.

§ 2. Дифференцирленүүчү чагылтуулар

X_n, Y_p –тиешелеш түрдө C^k жана C^q класстарына таандык болгон көптүспөлдүүлүктөр, G – X_n көптүспөлдүүлүгүндөгү ачык камтылуучу көптүк болсун. $f : G \to Y_p$ чагылтусун карайбыз.

φ –аймагы $U \subset G$ көптүгү болгон карта, ал эми ψ – аймагы $V \supset f(U)$ болгон карта болсун.

Эгерде $U \subset G$ аймактуу каалагандай φ картасы үчүн $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ (мында $\varphi(U) \subset R^n, \psi(V) \subset R^p$) чагылтуусу $C^m (m \leq min(k, q))$ классына таандык болсо, анда f чагылтуусу C^m классындагы ***дифференцирленүүчү чагылтуу*** деп аталат.



3 – чийме.

$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ чагылтуусу $\varphi(x)\in\varphi(U)\subset R^n$ чекитин $y\in\psi(V)\subset R^p$ чекитине которот. Эгерде $\varphi(x)=\left(x^1,x^2,...,x^n\right)$ б.а. x^i- $x\in U$ чекитинин φ картасындагы координаталары болсо жана $y=\left(y^1,y^2,...,y^p\right)$ болсо, анда $y^a=y^a\left(x^1,x^2,...,x^n\right)$, $a=1,2,...,p$. Аныктоо боюнча $f\in C^m\left(X_n,Y_p\right)\Leftrightarrow y^a\in C^m\left(R^n,R^p\right)$.

Эгерде Y_p көптүспөлдүүлүгү үчүн R көптүгүн алсак, анда G көптүгүндө аныкталган, n аргументтүү, C^m классына таандык болгон f чыныгы функциясын алабыз.

X_n-C^k классына таандык көптүспөлдүүлүк, C_x^k- $x\in X_n$ чекитин кармап турган G ачык камтылуучу көптүгүндө аныкталган, C^k классына таандык функциялардын көптүгү болсун $(k > 0)$. Эгерде $\varphi -$ x чекитиндеги карта, ал эми $\varphi(x) = (x^1, x^2, ..., x^n) \in R^n$ болсо, анда $x = \varphi^{-1}(x^1, x^2, ..., x^n)$ жана $y = f(x) = f(\varphi^{-1}(x^1, ..., x^n)) = f^*(x^1, ..., x^n)$ болот, мында $f^* = f \circ \varphi^{-1}$. Төмөндөгүдөй белгилөөнү кабыл алабыз:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x (f) \overset{def}{=} \left.\frac{\partial f^*}{\partial x^i}\right|_{\varphi(x)}$$

$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x (f)$ символунун ордуна $\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x$ деп жазышат.

$\xi^i \in R$ $(i = 1,2,...,n)$ чыныгы сандарын алалы да, төмөндөгүдөй закон боюнча аракет этүүчү $X : C_x^k \to R$ сызыктуу функционалын карайлы:

$$\forall f \in C_x^k : X(f) = \xi^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x$$

(i боюнча 1 ден n ге чейин суммалоо жүргүзүлөт).

Бул функционалды

$$X = \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \qquad (1)$$

көрүнүшүндө белгилейбиз.

Бардык ушундай функционалдардын көптүгүндө «кошуу» жана «санга көбөйтүү» амалдарын төмөндөгүдөй аныктайлы:

$$(X_1+X_2)(f)=X_1(f)+X_2(f),$$
$$(\alpha X)(f)=\alpha X(f).$$

(1) көрүнүштөгү бардык функционалдардын көптүгүн T_x аркылуу белгилейбиз. Бул көптүк вектордук мейкиндик болот жана аны X_n көптүспөлдүүлүгүнүн x чекитиндеги ***жаныма мейкиндиги*** деп аташат. Ал эми анын элементтери X_n көптүспөлдүүлүгүнүн x чекитиндеги ***жаныма векторлору*** деп аталышат. Ошентип, берилген φ картасында $X\in T_x$ вектору n даана ξ^i сандары менен аныкталат. Эгерде $\xi^i=\delta_n^i$ (Кронекердин символу) деп алсак, анда төмөндөгүдөй n векторго ээ болобуз:

$$X_k^o=\frac{\partial}{\partial x^k}\quad (k=1,2,\dots,n).$$

Бул векторлор сызыктуу көз каранды эмес экендигин көрсөтөлү. Төмөндөгү барабардыкты карайбыз:

$$\lambda^k X_k^o=0\qquad \left(\lambda^k\in R\right)\tag{2}$$

$\lambda^k X_k^o$ функционалын $x^i\in C_x^k$ функциясына колдонолу. Анда $\lambda^k X_k^o\left(x^i\right)=0$ же $\lambda^k\frac{\partial x^i}{\partial x^k}=0$, б.а. $\lambda^k\delta_k^i=0$. Мындан $\lambda^k=0$ экендиги келип чыгат. Ошентип, бардык λ^k нөлгө барабар болгондо гана (2) барабардык орун алат. Демек, $\frac{\partial}{\partial x^i}$ векторлору сызыктуу көз каранды эмес.

(1) формуладан ар бир $X \in T_x$ вектору $\frac{\partial}{\partial x^k}$ векторлорунун сызыктуу комбинациясы боло тургандыгын көрөбүз. Демек, $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ – T_x мейкиндигинин базиси болот жана $dim\, T_x = n$.

f функциясынын x чекитиндеги дифференциалы төмөндөгү формула боюнча аныкталат:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_x dx^i \tag{3}$$

Эгерде $f, g \in C_x^k$ болсо, анда $df + dg$ – $(f + g) \in C_x^k$ функциясынын дифференциалы болот.

Эгерде $\alpha \in R$ болсо, анда αdf – $\alpha\, f \in C_x^k$ функциясынын дифференциалы болот. Демек, C_x^k көптүгүнөн алынган функциялардын x чекитиндеги дифференциалдары R талаасынын үстүндө берилген вектордук мейкиндикти түзүшөт жана бул мейкиндикти T_x^* аркылуу белгилешет.

$x^i \in C_x^k$ болгондуктан, $dx^i \in T_x^*$, $\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_x \in R$ болгондуктан, (3) формуланын негизинде төмөндөгүдөй жыйынтыкка келебиз: ар кандай $df \in T_x^*$ сызыктуу көз каранды эмес n сандагы dx^i дифференциалдарынын сызыктуу комбинациясы болот. Демек, $dim\, T_x^* = n$ жана (dx^i) – T_x^* вектордук мейкиндигинин базиси болот экен.

T_x^* мейкиндигинин ар кандай df элементи төмөндөгүдөй закон боюнча $df : T_x \to R$ сызыктуу чагылтуусун аныктайт:

$$(df)(X) = X(f), \quad \forall X \in T_x. \tag{4}$$

Эгерде $f = x^i$ $X = \frac{\partial}{\partial x^k}$ деп алсак, анда (4) формула боюнча төмөндөгүнү алабыз:

$$(dx^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \delta_k^i.$$

Ошентип, T_x^* вектордук мейкиндиги T_x мейкиндигине түйүндөш болот, ал эми T_x^* мейкиндигинин (dx^i) базиси T_x мейкиндигинин (∂_k) базисине ***түйүндөш базис*** деп аталат (мында $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$).

T_x^* мейкиндигинин элементтери ***коварианттык векторлор*** (кыскача ковекторлор) же x ***чекитиндеги сызыктуу формалар*** деп аталышат. Ал эми T_x^* вектордук мейкиндиги X_n көптүспөлдүүлүгүнүн x чекитиндеги ***коварианттык жаныма мейкиндиги*** деп аталат.

Эскертүү1.2. E_n евклиддик мейкиндигинде $\Re = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ ортонормаланган реперин алалы жана кандайдыр бир $\vec{\vartheta} = \alpha^i \vec{e}_i \neq \vec{0}$ векторун карайлы. f – C^k $(k > 0)$ классына таандык функция болсун (кандайдыр бир $G \subset E_n$ аймагында аныкталган). Анда $x \in G$ чекитинде төмөндөгүдөй векторду аныктоого болот:

$$gradf = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_x \vec{e}_i .$$

Бул вектор менен $\vec{\vartheta}$ векторунун скалярдык көбөйтүндүсүн табалы:

$$\vec{\vartheta} \cdot gradf = \alpha^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_x = \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x (f). \qquad (5)$$

Ошентип, $\vec{\vartheta}$ вектору төмөндөгүдөй закон боюнча $X : C_x^k \to R$ сызыктуу чагылтуусун аныктайт экен: $X(f) = \alpha^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_x$. Чагылтууну $X = \vec{\vartheta}$ деп белгилеп алсак, анда (5) формуладан

$$\vec{\vartheta}(f) = \vec{\vartheta} \cdot gradf$$

келип чыгат. Бул болсо f функциясынын $\vec{\vartheta}$ векторунун багыты боюнча алынган туундусу.

T_x мейкиндигинин базиси, б.а. T_x мейкиндигинен ирети менен алынган сызыктуу көз каранды эмес болушкан $X_1, X_2, ..., X_n$ векторлору x ***чекитиндеги репер*** деп аталат жана $\Re_x$ аркылуу белгиленет. T_x мейкиндигинин $\Re_x$ реперине T_x^* мейкиндигиндеги түйүндөш базис же θ_x корепери туура келет. Бул жерде ***корепер*** деп x чекитиндеги сызыктуу көз каранды эмес болушкан n сандагы иреттелген

θ^i сызыктуу формалардын көптүгүн атадык. Ал эми $\Re_x$ реперине түйүндөш корепер $\theta^i(X_k)=\delta_k^i$ шартын канааттандырат. (∂_k) репери φ картасындагы табигый репер, ал эми (dx^i) корепери табигый ***корепер*** деп аталат.

$\varphi_1, \varphi_2 -$ $x \in X_n$ чекитинин чеке-белинде аныкталган карталар болушсун:

$$\varphi_1(x)=\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right), \varphi_2(x)=\left(y^1, y^2, \ldots, y^n\right).$$

T_x мейкиндигинен алынган векторлор да, T_x^* мейкиндигинен алынган ковекторлор да бул карталарга карата ар түрдүү көрүнүшкө ээ болушат.

Теорема1.1. φ_1 картасынан φ_2 картасына өтүүдө T_x мейкиндигиндеги базистик векторлор төмөндөгүдөй закон боюнча өзгөрүшөт:

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_x=\left.\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right|_x \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x, \tag{6}$$

ал эми T_x^* мейкиндигиндеги базистик ковекторлор

$$dy^i=\left.\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right|_x dx^k, \tag{7}$$

закону боюнча өзгөрүшөт.

Далилдөө. Шарт боюнча $\varphi_1(x)=\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$, $\varphi_2(x)=\left(y^1, y^2, \ldots, y^n\right)$ жана φ_1, φ_2 – гомеоморфизмдер болушкандыктан, бул чагылтууларга тескери чагылтуулар жашайт (жана алар да гомеоморфизмдер болушат). Демек,

$$x=\varphi_1^{-1}\left(x^1,x^2,...,x^n\right),\ \varphi_2\left(\varphi_1^{-1}\left(x^1,x^2,...,x^n\right)\right)=\left(y^1,y^2,...,y^n\right).$$

Мындан

$$y^i=y^i\left(x^1,x^2,...,x^n\right). \tag{8}$$

Ушуга окшош эле төмөндөгүнү алабыз:

$$x^j=x^j\left(y^1,y^2,...,y^n\right). \tag{9}$$

(8) жана (9) барабардыктардын оң жактары анык бир $C^k(k>0)$ классына таандык болгон функциялар болушат, себеби $\varphi_1,\varphi_2 -\ C^k$ классына таандык атластын карталары.

Татаал функцияны дифференцирлөөнүн эрежесин пайдаланып, (6) формуланы жеңил эле келтирип чыгарууга болот. Ал үчүн $f\in C_x^k$ функциясын алалы. Анда φ_1 картасында $f^*\left(x^1,x^2,...,x^n\right)$ функциясына ээ болобуз. φ_2 картасына өтүүдө (9) формуланы пайдаланабыз да, $f^*\left(x^1\left(y^1,y^2,...,y^n\right),...,x^n\left(y^1,y^2,...,y^n\right)\right)$ функциясына ээ болобуз. Ошондуктан, $\forall f\in C_x^k$ үчүн

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y^i}\right)_x=\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)_x\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right)_x \quad \text{же}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_x(f)=\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right)_x\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_x(f)$$

келип чыгат. Бул болсо (6) формуланын өзү. (8) функцияларды дифференцирлөө менен (7) формулаларды алабыз.

$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_x$ – T_x мейкиндигинин базиси болгондуктан, (6) формуладагы $\left\|\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right\|$ матрицасы кубулбаган матрица болот:

$$det\left\|\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right\| \neq 0.$$

§ 3. Чагылтуунун дифференциалы

X_n, Y_p – дифференцирленүүчү көптүспөлдүүлүктөрүн, $G \subset X_n$ ачык көптүгүн жана $f : G \to Y_p$ дифференцирленүүчү чагылтуусун карайбыз. Ар бир $x \in G$ чекитинде f чагылтуусу төмөндөгүдөй закон боюнча $f_{*x} : T_x \to T_{f(x)}$ сызыктуу чагылтуусун пайда кылат (мында $T_{f(x)}$ – Y_p көптүспөлдүүлүгүнүн $f(x)$ чекитиндеги жаныма мейкиндиги). Эгерде $X \in T_x$, $g \in C^k_{f(x)}$ (мында $C^k_{f(x)}$ – Y_p көптүспөлдүүлүгүнүн $f(x)$ чекитинин кандайдыр бир чекебелинде аныкталган, C^k классына таандык функциялардын көптүгү) болсо, анда

$$(f_{*x}(X))(g) = X(g \circ f) \qquad (1)$$

деп алабыз. $g \in C^k_{f(x)}$ болгондуктан, $g \circ f \in C^k_x$ болот. Демек, (1) формуланын оң жагы аныкталды. Эгерде

$\varphi -$ $x \in X_n$ чекитинин чеке-белиндеги карта, ал эми $\psi -$ $y = f(x)$ чекитинин чеке-белиндеги карта болсо, анда $\varphi(x) = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$ болот. Мындан $x = \varphi^{-1}\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$, $y = f \circ \varphi^{-1}\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$ келип чыгат. $\psi(y) = \left(y^1, y^2, ..., y^p\right)$, б.а. $\left(y^1, y^2, ..., y^p\right) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$. Демек,

$$y^a = y^a\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)\,(a = 1,2,..., p). \qquad (2)$$

(2) теңдемелердин системасын f ***чагылтуусунун координаталар аркылуу туюнтулушу*** деп аташат.

$f_{*x}(X)-$ $C^k_{f(x)}$ көптүгүндө аныкталган сызыктуу чагылтуу экендигин көрдүк. Демек, $f_{*x}(X) = T_{f(x)}$.

$$X = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x,$$

$$h = g \circ f = g^*\left(y^1\left(x^1, x^2, ..., x^n\right), ..., y^p\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)\right)$$

болсун. Анда

$$X(g \circ f) = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x (h) = \xi^i \left(\frac{\partial h}{\partial x^i}\right)_x = \xi^i \left(\frac{\partial h}{\partial y^a}\right)_{f(x)} \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\right)_x,$$

б.а. $X(g \circ f) = \left(\dfrac{\partial y^a}{\partial x^i}\right)_x \xi^i \left(\dfrac{\partial}{\partial y^a}\right)_{f(x)} (h).$

(1) формуланы эске алсак, анда төмөндөгүдөй жыйынтыкка келебиз: эгерде $X \in T_x$ вектору $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$ базисинде ξ^i координаталарына ээ болсо, анда тиешелеш $f_{*x}(X)$ вектору

$\left(\dfrac{\partial}{\partial y^a}\right)_{f(x)}$ базисинде

$$\left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\right)\xi^i = \eta^a \tag{3}$$

координаталарына ээ болот.

Ошентип, эгерде $f : G \to Y_p$ чагылтуусу координаталардын жардамы менен (2) көрүнүштө аныкталса жана $x \in G$ чекитинде $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$ репери, ал эми $f(x)$ чекитинде $\left(\dfrac{\partial}{\partial y^a}\right)_{f(x)}$ репери тандалып алынган болсо, анда f_{*x} сызыктуу чагылтуусу $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ чагылтуусунун $\left\|\dfrac{\partial y^a}{\partial x^i}\right\|$ якобиандык матрицасынын жардамы менен (3) көрүнүштө туюнтулат.

f_{*x} чагылтуусу f ***чагылтуусунун дифференциалы*** же ***индуцирленген чагылтуу*** деп аталат (жана f_x' же df көрүнүшүндө белгиленет).

f чагылтуусу төмөндөгүдөй закондун негизинде дагы бир $f_x^* : T_{f(x)}^* \to T_x^*$ чагылтуусун пайда кылат: эгерде $g \in C_{f(x)}^k$ (демек $dg = (dg)_{f(x)} \in T_{f(x)}^*$) болсо, анда $f_x^*(dg) = d(g \circ f)_x$ деп алабыз.

Эгерде $f \in C_x^k$, $g \in C_{f(x)}^k$ болсо, анда $g \circ f \in C_x^k$ болот, демек, $d(g \circ f)_x \in T_x^*$. f чагылтуусунун координаталар аркылуу туюнтулушу – $y^a = y^a\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$, g чагылтуусунун координаталары аркылуу туюнтулушу $g = g^*\left(y^1, y^2, ..., y^p\right)$ көрүнүшүндө болсун дейли. Анда

$$d(g \circ f) = \left(\frac{\partial g}{\partial y^a}\right)_{f(x)} \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\right)_x dx^i, \text{ б.а.}$$

$f_x^*(dg) = \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial y^a}\right)_{f(x)} dx^i$ болот. Демек, эгерде $dg \in T_{f(x)}^*$ ковектору $\left(dy^a\right)$ корепоринде $\left(\frac{\partial g}{\partial y^a}\right)_{f(x)} = \eta_a$ координаталарына ээ болсо, анда ага тиешелеш $f_x^*(dg) \in T_x^*$ ковектору $\left(dx^i\right)$ корепоринде $\xi^i = \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\right)_x \eta_a$ координаталарына ээ болот. Координаталардын жардамы менен f_x^* чагылтуусу ушундайча туюнтулат.

$f : X_n \to Y_p$ жана $g : Y_p \to Z_q$ дифференцирленүүчү чагылтуулары берилген болсун. Анда $f_{*x} : T_x \to T_{f(x)}$, $g_{*x} : T_{f(x)} \to T_{(g \circ f)(x)}$ индуцирленген чагылтууларынын композициясы катарында $(g \circ f)_{*x} : T_x \to T_{(g \circ f)(x)}$

индуцирлеңген чагылтуусу пайда болот. Ошентип, «чынжыр эрежеси» (цепное правило) деп аталган законго ээ болобуз:

$$(g \circ f)_{*x} = g_{*f(x)} \circ f_{*x}. \tag{4}$$

Айрым учурларды карайлы.

1. $e : X_n \to X_n$ теңдеш чагылтуусун алабыз. (1) формулага ылайык $\forall X \in T_x$, $\forall g \in C^k_{f(x)} : (f_{*x}(X))(g) = X(g \circ f)$ келип чыгат. $f = e$ болгондуктан, $f(x) = e(x) = x$. Демек, $g \in C^k_x$. Ошондуктан $X(g \circ f) = X(g(x)) = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x (g)$.Ошентип, $f_{*x}(X) = e_{*x}(X) = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x = X$, б.а. e_{*x} – T_x вектордук мейкиндигин теңдеш өзгөртүп түзүү болот экен.

2. C^k классына таандык $f : X_n \to Y_p$ диффеоморфизмин карайлы, б.а. f – биективдүү жана f, f^{-1} чагылтуулары C^k классына таандык болушсун. $f^{-1} \circ f = e$ болгондуктан, (4) формула боюнча $\left(f^{-1}\right)_{*f(x)} \circ f_{*x} = e_{*x}$ теңдеш чагылтуусуна ээ болобуз. Демек, f_{*x} чагылтуусу тескериленүүчү болот, анын үстүнө бул чагылтуунун тескериси болуп $\left(f^{-1}\right)_{*f(x)}$ чагылтуусу эсептелет, б.а. $(f_{*x})^{-1} = \left(f^{-1}\right)_{*f(x)}$. Мындан, f_{*x} чагылтуусу биективдүү экендиги келип чыгат. Демек, $dim T_x = dim T_{f(x)}$. Ошентип,

$n = p$, б.а. диффеоморфтуу көптүспөлдүүлүктөр бирдей эле ченемдүүлүккө ээ болуша тургандыгы келип чыгат.

$G -$ X_n көптүспөлдүүлүгүндөгү ачык көптүк, ал эми $f : G \to Y_p$ дифференцирленүүчү чагылтуу болсун.

f чагылтуусунун $x \in G$ ***чекитиндеги рангы*** деп $f_{*x} : T_x \to T_{f(x)}$ индуцирленген чагылтуусунун рангын айтабыз, б а. $f_{*x}(T_x) \subset T_{f(x)}$ камтылуучу вектордук мейкиндигинин ченемдүүлүгүн айтабыз. f чагылтуусунун x чекитиндеги рангы $\left\| \dfrac{\partial y^a}{\partial x^i} \right\|$ якобиандык матрицасынын x чекитиндеги рангына барабар болот. Математикалык анализ курсунан төмөндөгүдөй теорема белгилүү [10]:

Теорема1.2. (Ранг жөнүндөгү теорема) $X_n, Y_p -$ дифференцирленүүчү көптүспөлдүүлүктөрү жана ар бир $x \in X_n$ чекитинде бирдей эле r рангына ээ боло тургандай $f : X_n \to Y_p$ дифференцирленүүчү чагылтуусу берилген болсун. Анда $\forall x \in X_n$ чекитинин чеке-белинде φ картасы $\left(\varphi(x) = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)\right)$, ал эми $y = f(x)$ чекитинин чеке-белинде ψ картасы $\left(\psi(y) = \left(y^1, y^2, \ldots, y^p\right)\right)$ жашап, бул карталардын жардамы менен f чагылтуусу

$$y^t = x^t (t = 1, 2, \ldots, r),\ y^s = 0\ (s = r + 1, \ldots, p)$$

формулалары менен туюнтулат.

Натыйжа. $f : X_n \to Y_p$ дифференцирленүүчү чагылтуусу берилген болсун. Эгерде f чагылтуусу x чекитинде максималдык рангга (n) ээ болсо, анда x чекитинин ушундай бир U ачык чеке-бели жашап, $f|_U$ чагылтуусу (б.а. f чагылтуусунун U көптүгүндөгү тарылышы) U көптүгүн $f(U)$ көптүгүнө диффеоморфтук чагылтуу болот.

Далилдөө. $x \in X_n$ чекитинде f чагылтуусунун рангы n ге барабар болсун дейли. $det\left\|\frac{\partial y^i}{\partial x^i}\right\|$ функциясы үзгүлтүксүз болгондуктан, ал x чекитинин кандайдыр бир чеке-белинде нөлдөн айырмалуу болот. Ранг жөнүндөгү теореманын негизинде x чекитинин ушундай бир U чеке-бели жашап, ушул чеке-белдеги φ картасындагы жана $f(x) \in Y_n$ чекитинин кандайдыр бир чеке-белиндеги ψ картасындагы координаталардын жардамы менен f чагылтуусу $y^i = x^i(i = 1,2,\dots,n)$ көрүнүшүндө туюнтулат. Бул теңдемелерден $f|_U$ чагылтуусу биективдүү экендиги, анын үстүнө бул чагылтуу да, анын тескери чагылтуусу да дифференцирленүүчү чагылтуулар экендиги келип чыгат. Демек, бул чагылтуу U көптүгүн $f(U)$ көптүгүнө диффеоморфтук чагылтуу болот.

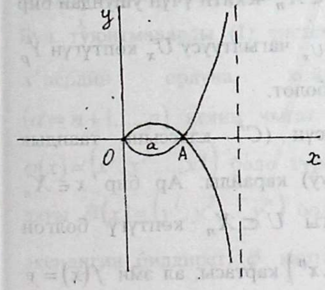
Эскертүү1.3. Бардык дифференцирленүүчү көптүспөлдүүлүктөрдүн көптүгүндө «C^k –диффеоморфизм» эквиваленттүүлүк катышы болот. Бул катыш дифференциалдык топологиядагы негизги катыш болуп эсептелет. (Дифференциалдык топология X_n көптүспөлдүүлүгүндөгү фигуралардын диффеоморфтук чагылтууларда сактала турган касиеттерин изилдейт). ***Диффеоморфизм*** гомеоморфизмдин айрым учуру болуп эсептелет, бирок тескерисинче болбойт. Эгерде $n \leq 6$ жана X_n, Y_n жылма көптүспөлдүүлүктөрү гомеоморфтуу болушса, анда алар диффеоморфтуу да болушат. $n > 6$ болгондо таптакыр башкача болот. 7 ченемдүү сферага (S_7) гомеоморфтуу болушкан (демек өз ара эки-экиден гомеоморфтуу), бирок эки-экиден диффеоморфтуу болушпаган 28 жылма көптүспөлдүүлүк жашай тургандыгын 1957-жылы Милнор далилдеген [8]. Ошентип, $n > 6$ болгон учурда диффеоморфизм менен гомеоморфмизм – ар түрдүү эквиваленттүүлүк катыштары болушат.

§ 4. Чөгөрүү жана кийирүү

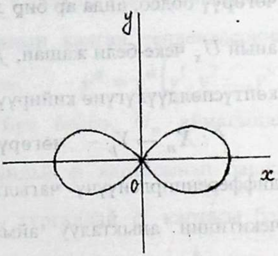
Эгерде $\forall x \in X_n$: ранг $f_{*x} = n$ болсо, анда $f : X_n \to Y_p$ дифференцирленүүчү чагылтуусу ***чөгөрүү*** деп аталат [11]. Мында $n \leq p$ экендиги түшүнүктүү. Ар бир $x \in X_n$ чекитинин кандайдыр бир U_x чеке-белинде гана f чөгөрүүсү инъективдүү (б.а. локалдык инъективдүү) болот. Бирок, толугу менен X_n көптүспөлдүүлүгүндө иньективдүү (б.а. глобалдык инъективдүү) болбой калышы да мүмкүн.

Мисалы, E_2 тегиздигинде ортонормаланган репер берилген болсун. Төмөндөгүдөй закондун негизинде аныкталган $f : R \to E_2$ чагылтуусу $x = \frac{2at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{at(t^2-1)}{1+t^2}$, $a = const > 0$ (мында $f(R)$ - строфоида) чөгөрүү болот. Бул чагылтуу бардык эле чөгөрүүлөр сыяктуу локалдык инъективдүү болот, бирок глобалдык инъективдүү болбойт. Себеби, бул чагылтууда R ден алынган ар түрдүү $t_1 = -1$, $t_2 = 1$ чекиттери бир эле $A(a,0) \in E_2$ чекитине өтөт (4-чийме).

$f : X_n \to Y_p$ чөгөрүүсү ***кийирүү*** деп аталат, эгерде $X \overset{t\circ p}{\sim} f(X_n)$ болсо, б.а. f – X_n ди $f(X_n)$ ге гомеоморфтук чагылтуу болсо.



4 – чийме.



5 – чийме.

Дагы бир мисал карайлы. E_2 тегиздигинде ортонормаланган реперди алабыз да, $f : R \to E_2$

чагылтуусун $x = sin t,\ y = sin 2t$ закону боюнча аныктайлы (мында $f(R)$- лемниската деп аталат). Бул чагылтуу чөгөрүү болот, бирок инъективдүү эмес (5-чийме): лемнискатанын ар бир M чекитинин алгачкы элеси чексиз көп $t_m = t_\circ + 2\pi m$ (мында $f(t_\circ) = M,\quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$) чекиттерин кармап турат.

$f\Big|_{(0,2\pi)}$ чагылтуусу инъективдүү чөгөрүү болот, бирок кийирүү боло албайт (O чекитинин чеке-белин карагыла). Ал эми $f\Big|_{(0,\pi)}$ чагылтуусу кийирүү болот.

Жогорудагы аныктоолордон ар бир чөгөрүү локалдык кийирүү боло тургандыгын көрөбүз, б.а. эгерде $f : X_n \to Y_p$ чөгөрүү болсо, анда ар бир $x \in X_n$ чекити үчүн ушундай бир анын U_x чеке-бели жашап, $f\Big|_{U_x}$ чагылтуусу U_x көптүгүн Y_p көптүспөлдүүлүгүнө кийирүү болот.

$f : X_n \to Y_p$ – чөгөрүүсүн (C^k классына таандык дифференцирленүүчү чагылтуу) карайлы. Ар бир $x \in X_n$ чекитинин аныкталуу аймагы $U \subset X_n$ көптүгү болгон ушундай бир $\varphi(x) = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ картасы, ал эми $f(x) = y$ чекитинин аныкталуу аймагы $V \supset f(U)$ көптүгү болгон ушундай бир $\psi(y) = \left(y^1, y^2, \ldots, y^p\right)$ картасы жашап, f

чагылтуусунун мындай координаталар аркылуу туюнтулушу төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$y^a = y^a\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \quad (a = 1,2,...,p), \tag{1}$$

мында $\forall x \in U$: ранг $\left\| \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \right\|_{\varphi(x)} = n \quad (i = 1,2,...,n)$.

Биз ар дайым x^i координаталарын $det\left\| \frac{\partial y^i}{\partial x^i} \right\| \neq 0$ боло тургандай номерленген деп эсептей алабыз. Анда, математикалык анализ курсунан белгилүү болгондой, кандайдыр бир $U_o \subset U$ чеке-белинде (1) системанын биринчи n теңдемелерин x^i ге карата чечүүгө болот: $x^i = x^i\left(y^1, y^2, ..., y^n\right)$. Мында барабардыктын оң жагындагы функциялар U_o чеке-белинде C^k классына таандык болушат. Бул туюнтмаларды (1) системанын калган теңдемелерине x^iлердин ордуна койсок, $y^\alpha = y^\alpha\left(y^1, y^2, ..., y^n\right)$ $(\alpha = n+1, ..., p)$ келип чыгат. Бул болсо, U_o аймагында $\varphi(x) = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$ боло тургандай φ картасынан башка дагы $\overline{\varphi}(x) = \left(y^1, y^2, ..., y^n\right)$ боло тургандай $\overline{\varphi}$ картасы бар экендигин билдирет. $\overline{\varphi}$ картасына өтөбүз да, y^k лардын ордуна координаталарды мурдагыдай эле x^k аркылуу белгилейли. Анда, f чөгөрүүсүнүн координаталар аркылуу туюнтулушу болуп эсептелген (1) система төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$\begin{cases} y^i = x^i \quad (i = 1,2,\ldots,n); \\ y^\alpha = y^\alpha\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \quad (\alpha = n+1,\ldots,p), \end{cases} \tag{2}$$

мында $y^\alpha \in C_x^k$.

Тескерисинче ырастоо да туура болот: эгерде f чагылтуусун ар бир $x \in X_n$ чекитинин чеке-белинде координаталардын жардамы менен (2) көрүнүштөгү теңдемелер аркылуу туюнтуу мүмкүн болсо (мында $y^\alpha \in C_x^k$), анда f чагылтуусу C^k классына таандык чөгөрүү болот.

X_n, Y_p – дифференцирленүүчү көптүспөлдүүлүктөр болушсун. $X_n \subset Y_p$ болгон учурду карайлы. $i : X_n \to Y_p$ чагылтуусу ***камтуу*** болсун ($e : Y_p \to Y_p$ теңдеш чагылтуусунун X_n көптүгүнө ***тарылышы***, б.а. $i = e\Big|_{X_n}$). Эгерде i – чөгөрүү болсо, анда X_n – ***чөгөрүлгөн көптүспөлдүүлүк*** деп аталат, эгерде i – кийирүү болсо, анда X_n – ***камтылуучу*** (Y_p көптүспөлдүүлүгүнө) ***көптүспөлдүүлүк*** деп аталат [11].

X_n чөгөрүлгөн көптүспөлдүүлүгүнүн индуцирленген топологиясы X_n көптүспөлдүүлүгүнүн өзүнүн топологиясы менен дал келбей калышы да мүмкүн. Эгерде X_n –

камтылуучу көптүспөлдүүлүк болсо, анда бул эки топология дал келишет.

Бир нече жаны түшүнүктөрдү киргизебиз. Эгерде төмөндөгү эки шарт орун алса, анда X топологиялык мейкиндиги ***локалдык компактуу топологиялык мейкиндик*** деп аталат:

а) X – бөлүнүүчү болсо;

б) $\forall x \in X$ чекити үчүн компактуу чеке-бели жашаса.

Мисалы, R сандык мейкиндиги локалдык компактуу (бирок компактуу эмес) мейкиндик болот.

Ар кандай X_n топологиялык көптүспөлдүүлүгү локалдык компактуу боло тургандыгын жеңил эле далилдөөгө болот.

Эгерде X_n локалдык компактуу мейкиндиги санаттык сандагыдан ашпаган компактуу көптүктөрдүн биригүүсү болсо, анда ал мейкиндикти ***чексиздикте санаттык мейкиндик*** деп аташат.

Мисалы, R сандык мейкиндиги чексиздикте санаттык болуп эсептелет. Себеби, $R^1 = \bigcup[-n,n]$.

Чексиздикте санаттык C^k – көптүспөлдүүлүктөр үчүн төмөндөгү жыйынтыктар 1934-жылы Уитни тарабынан далилденген [8].

Теорема1.3. (Уитнинин чөгөрүүлөр жөнүндөгү теоремасы). C^k $(k \geq 1)$ классына таандык ар кандай X_n көптүспөлдүүлүгү жана каалаган $p \geq 2n$ үчүн X_n ди R^p

мейкиндигине чагылтуучу чексиз көп C^k – чөгөрүүлөр жашайт.

Теорема1.4. (Уитнинин кийирүүлөр жөнүндөгү теоремасы). Ар кандай X_n C^k – көптүспөлдүүлүгү ($k \geq 1$) жана каалаган $p \geq 2n+1$ саны үчүн X_n ди R^p мейкиндигине чагылтуучу чексиз көп C^k – кийирүүлөр жашайт.

§ 5. Көптүспөлдүүлүктөрдөгү беттер

$R_+^n = \{(x^1, x^2, ..., x^n) \in R / x^n \geq 0\}$ көптүгүн алалы. R^n көптүгүнүн табигый топологиясы R_+^n көптүгүндө топологиялык структураны пайда кылат (индуцирленген топология), б.а. R_+^n көптүгү топологиялык мейкиндик (R^n ге камтылуучу) болот. Мындан ары R_+^n көптүгүн R^n дин камтылуучу мейкиндиги катары эсептейбиз.

X – санаттык базага ээ болгон хаусдорфтук мейкиндик болсун жана $(U_a)_{a \in A}$ – X мейкиндигинин ***ачык каптоосу*** төмөндөгүдөй шартты канааттандырсын: ар бир $a \in A$ үчүн U_a көптүгүн R_+^n мейкиндигинин ачык камтылуучу көптүгүнө чагылтуучу φ_a гомеоморфизми аныкталып, a нын жок дегенде бир мааниси үчүн $\varphi_a(U_a)$ көптүгү $x^n = 0$ боло тургандай чекиттерди кармап турсун. Анда X топологиялык мейкиндиги ***чеги бар*** (чек арага ээ болгон) n– ченемдүү көптүспөлдүүлүк деп аталат.

Эгерде $x \in U_{a_o}$ жана

$$\varphi_{a_o}\left(U_{a_o}\right) \bigcap \left\{\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \in R_+^n \middle| \; x^n = 0\right\} = \varnothing$$

боло тургандай $\left(U_{a_o}, \varphi_{a_o}\right)$ түгөйү жашаса, анда $x \in X$ чекити ***ички чекит*** деп аталат. Эгерде $x \in X$ чекити ички чекит болбосо, анда аны ***чек аралык*** чекит деп атайбыз. Бардык чек аралык чекиттердин көптүгүн X көптүспөлдүүлүгүнүн ***чек арасы*** (же ***чеги***) деп атайбыз.

$\Omega - R_+^n$ камтылуучу мейкиндигинин ачык камтылуучу көптүгү, ал эми $f - \Omega$ көптүгүндө аныкталган функция болсун.

Эгерде f функциясын кандайдыр бир $\Omega' \subset R^n$ $(\Omega \subset \Omega')$ ачык көптүгүндө аныкталган жана C^k классына таандык болгон F функциясына чейин улантуу мүмкүн болсо (б.а. $F \in C^k(\Omega')$ жана $F|_{\Omega} = f$ болсо), анда f функциясы C^k ***классына таандык*** деп айтышат.

Эгерде $S_o = (\varphi_a)_{a \in A}$ көптүгү төмөндөгү шартты канаатандырса (б.а. карталардын C^k – макулдашылгандык касиетине ээ болсо): $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \varnothing$ боло тургандай бардык $\alpha,\ \beta$ лар үчүн

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

чагылтуусу C^k классына таандык болсо, анда φ_a сыяктуу карталардын S_o көптүгү X топологиялык мейкиндигинде

чеги бар C^k – көптүспөлдүүлүктүн структурасын аныктайт деп айтышат. Ал эми X теги C^k –структураны карталардын C^k – макулдашылгандыгы боюнча максималдуулук касиетине ээ болгон карталардын $S \supset S_o$ көптүгү аныктайт.

Чеги бар C^k – көптүспөлдүүлүктөрдө C^k классына таандык функцияларды, жаныма векторлорду жана ковекторлорду аныктоого болот. Чеги бар C^k –көптүспөлдүү-лүктөр үчүн жылма чагылтуулар, чагылтуунун рангы, чөгөрүү жана кийирүү түшүнүктөрүн да аныктоо мүмкүн. Бул түшүнүктөрдүн бардыгы кадимки C^k – көптүспөлдүүлүктөрдө аныкталган сыяктуу эле аныкталышат.

Чеги бар көптүспөлдүүлүк чеги бар көптүспөлдүүлүккө гана гомеоморфтуу боло ала тургандыгы жана бул гомеоморфизмде биринчи көптүспөлдүүлүктүн чеги экинчи көптүспөлдүүлүктүн чегине өтө тургандыгы топологияда далилденет.

Мисалдар. 1. Кесинди, шоола – чеги бар бир ченемдүү жылма көптүспөлдүүлүктүн мисалдары болушат.

2. E_2 тегиздигиндеги тегерек, жарым тегиздик-чеги бар, эки ченемдүү жылма көптүспөлдүүлүккө мисал болушат.

3. E_3 мейкиндигинде ортонормаланган репер берилген болсун. Төмөндөгүдөй фигураны карайлы:

$$S^* = \{M(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ r \geq 0\}.$$

Бул - Oxy тегиздигинде жаткан, $x^2 + y^2 = r^2, z = 0$ теңдемелери менен аныкталган чоң айлана менен бирдикте алынган жогорку жарым сфера. S^* – чеги бар, эки ченемдүү жылма көптүспөлдүүлүк экендигин жеңил эле көрсөтүүгө болот. Бул көптүспөлдүүлүктүн чеги болуп, жогоруда көрсөтүлгөн Oxy тегиздигиндеги айлана эсептелет.

$X_n, X'_n, X''_n, Y_p, \ldots$ аркылуу тиешелеш ченемдүүлүктөгү C^k – көптүспөлдүүлүктөрдү, же чеги бар C^k – көптүспөлдүүлүктөрдү белгилейбиз.

Эки C^k – чөгөрүү берилген болсун:

$$f : X_n \to Y_p \ (n \le p), \ g : X'_n \to Y_p.$$

Эгерде $f = gh$ боло тургандай $h : X_n \to X'_n$ C^k– диффеоморфизми жашаса, анда f жана g чөгөрүүлөрүн σ_k катышында болушат дейбиз. $C^k\left(n, Y_p\right)$ аркылуу n– ченемдүү көптүспөлдүүлүктөрдү (чеги бар же чеги жок) Y_p көптүспөлдүүлүгүнө чагылтуучу бардык C^k – чөгөрүүлөрдүн көптүгүн белгилейли. Бул көптүктө σ_k катышы эквиваленттүүлүк катышы боло тургандыгын далилдейбиз.

а) $e : X_n \to X_n$ теңдеш чагылтуусун C^k – диффеоморфизм деп эсептөөгө болот. Ошондуктан,

$$\forall f \in C^k\left(n, Y_p\right) : f\sigma_k f,$$

б) $f,g \in C^k(n,Y_p)$ жана $f\sigma_k g$ болсун. Анда $f = gh$ боло тургандай $h: X_n \to X'_n$ C^k – диффеоморфизми жашайт. Мындан $h^{-1}: X'_n \to X_n$ диффеоморфизми жашап, $g = f \cdot h^{-1}$ боло тургандыгы келип чыгат. Демек, $g\sigma_k f$ болот. Ошентип $f\sigma_k g \Rightarrow g\sigma_k f$.

в) $u,f,g \in C^k(n,Y_p)$ берилген жана $f\sigma_k g$, $g\sigma_k u$ болсун. Мындан, $f = gh$ боло тургандай $h: X_n \to X'_n$ C^k – диффеоморфизми, $g = ut$ боло тургандай (эгерде $u: X''_n \to Y_p$ болсо) $t: X'_n \to X''_n$ C^k – диффеоморфизми жашай тургандыгы келип чыгат. $f = gh$ жана $g = ut$ барабардыктарынан $f = u(th)$ экендигин көрөбүз.

$th: X_n \to X''_n$ чагылтуусу C^k – диффеоморфизм болгондуктан, $f\sigma_k u$ болот. Демек, ($f\sigma_k g$ жана $g\sigma_k u$) $\Rightarrow f\sigma_k u$.

$C^k(n,Y_p)\big|_{\sigma_k}$ фактор-көптүгүнүн элементтери Y_p көптүспөлдүүлүгүндөгү n – ***ченемдүү***, C^k ***классына таандык беттер*** деп аталышат. Ошентип, Y_p көптүспөлдүүлүгүндөгү n – ***ченемдүү***, C^k классына таандык бет - бул n – ченемдүү көптүспөлдүүлүктөрдү (же чеги бар n – ченемдүү көптүспөлдүүлүктөрдү) Y_p көптүспөлдүүлүгүнө чагылтуучу өз ара эквиваленттүү (σ_k катышында болушкан) C^k – чөгөрүүлөрдүн классы экен.

C^k классына таандык F_n бети $k \geq 1$ болгон учурда жылма бет деп аталат. Ар бир $f : X_n \to Y_p$ чөгөрүүсү өзүнө эквиваленттүү болушкан чөгөрүүлөрдүн классын (Y_p көптүспөлдүүлүгүндөгү $n-$ ченемдүү F_n бетин) бир маанилүү аныктайт. Бул учурда f чөгөрүүсүн $n-$ ченемдүү F_n ***бетинин параметризациясы*** деп аташат.

Эгерде f жана $g-$ эквиваленттүү чөгөрүүлөр болушса, анда $f = gh$ болот. Демек,

$$f(X_n) = g(h(X_n)), \text{ б.а. } f(X_n) = g(X'_n).$$

Мындан, эквиваленттүү чөгөрүүлөрдүн түспөлдөрү Y_p көптүспөлдүүлүгүндөгү бир эле $f(X_n)$ чөгөрүлгөн көптүспөлдүүлүк боло тургандыгын көрөбүз.

Эгерде $n-$ ченемдүү F_n бети $f : X_n \to Y_p$ чөгөрүүсү менен аныкталган болсо, анда F_n бети катары $f(X_n)$ көптүгүн эсептейбиз жана $F_n \subset Y_p$ деп жазабыз. Бирок, F_n бети (б.а. $f(X_n)$ көптүгү) чөгөрүүнүн жалпы учурунда Y_p нын камтылуучу көптүспөлдүүлүгү болбой калышы да мүмкүн. F_n бетинин чексиз көп параметризациясы жашай тургандыгын жеңил эле байкоого болот.

$n=1$ болгон учурда Y_p көптүспөлдүүлүгүндөгү $n-$ ченемдүү F_n бети сызык (же ийри) деп аталат, ал эми $n=p-1$ болгон учурда F_n - ***гипербет*** деп аталат.

Беттердин мисалдары [2] де көрсөтүлгөн.

§ 6. Көптүспөлдүүлүктөрдүн түз көбөйтүндүсү. Катмарланган көптүспөлдүүлүк түшүнүгү

X_n жана Y_p C^k –көптүспөлдүүлүктөрү берилген болсун. $X_n \times Y_p$ декарттык көбөйтүндүсүндө C^k – структураны төмөндөгүдөй аныктоого болот. X_n де $U \subset X_n$ аймактуу φ картасын, ал эми Y_p да $V \subset Y_p$ аймактуу ψ картасын алабыз да, $\varphi \times \psi : U \times V \to R^{n+p}$ чагылтуусун $(\varphi \times \psi)(x,y) = (\varphi(x), \psi(y)) \in R^{n+p}$ закону боюнча аныктайлы. Бул чагылтуу $U \times V$ көптүгүн $\varphi(U) \times \psi(V) \subset R^{n+p}$ көптүгүнө гомеоморфтук чагылтуу экендигин жеңил эле көрсөтүүгө болот. Демек, $\varphi \times \psi -$ $X_n \times Y_p$ көптүгүндө карта болуп эсептелет.

Эгерде A_o, $B_o -$ тиешелеш түрдө X_n жана Y_p көптүспөлдүүлүктөрүндөгү C^k классына таандык атластар болушса, анда $A_o \times B_o = \{\varphi \times \psi / \varphi \in A_o, \psi \in B_o\} -$ $X_n \times Y_p$ көптүгүндө C^k классына таандык атлас болот. Бул атлас

$X_n \times Y_p$ көптүгүндө C^k - көптүспөлдүүлүктүн структурасын аныктайт. Пайда болгон $X_n \times Y_p$ көптүспөлдүүлүгү берилген X_n, Y_p көптүспөлдүүлүктөрүнүн ***түз көбөйтүндүсү*** деп аталат жана $dim\left(X_n \times Y_p\right) = n + p.$

Табигый проекциялоо деп аталуучу төмөндөгүдөй чагылтууларды карайбыз:

$$\pi_1 : X_n \times Y_p \to X_n, \quad \pi_2 : X_n \times Y_p \to Y_p,$$
$$\forall (x, y) \in X_n \times Y_p : \pi_1(x, y) = x, \quad \pi_2(x, y) = y.$$

Эгерде $\varphi\left(\varphi(x) = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right)\right) -$ X_n көптүспөлдүүлүгүндө берилген карта, ал эми $\psi\left(\psi(y) = \left(y^1, y^2, ..., y^p\right)\right) -$ Y_p көптүспөлдүүлүгүндө аныкталган карта болсо, анда

$\varphi \times \psi| \quad (\varphi \times \psi)(x, y) = \left(x^1, x^2, ..., x^n, \; y^1, y^2, ..., y^p\right) -$ $X_n \times Y_p$ көптүспөлдүүлүгүндөгү карта болот. Мындан

$$(x, y) = (\varphi \times \psi)^{-1}\left(x^1, x^2, ..., x^n, \, y^1, y^2, ..., y^n\right);$$
$$\pi_1(x, y) = x \Rightarrow x = \pi_1 \circ (\varphi \times \psi)^{-1}\left(x^1, ..., x^n, \, y^1, ..., y^p\right).$$

Демек,

$$\left(x^1, ..., x^n\right) = \varphi(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x^1, x^2, ..., x^n\right) = \varphi \circ \pi_1 \circ (\varphi \times \psi)^{-1}\left(x^1, ..., x^n, \, y^1, ..., y^p\right).$$

Координаталар аркылуу туюнтулган π_1 проекциялоосу R^{n+p} сандык мейкиндигин R^n сандык мейкиндигине табигый проекциалоонун өзү боло тургандыгын көрдүк. Ошондуктан, π_1 проекциялоосу

$$x^i = f^i\left(x^1, x^2, ..., x^n, y^1, y^2, ..., y^p\right)$$

көрүнүшүндөгү теңдемелер менен туюнтулат (мында $f^i - \left(x^1, x^2, ..., x^n, y^1, y^2, ..., y^p\right) \in R^{n+p}$ чекитинин i – координатасын билдирет). Бул функциялар дифференцирленүүчү экендиги түшүнүктүү, анын үстүнө

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^k} = \delta^i_k, \ \frac{\partial f^i}{\partial y^l} = 0.$$

Ошондуктан, $\forall(x, y) \in X_n \times Y_p : \ ранг \left\| \frac{\partial f^i}{\partial x^k}, \frac{\partial f^i}{\partial y^l} \right\|_{(x,y)} = n.$

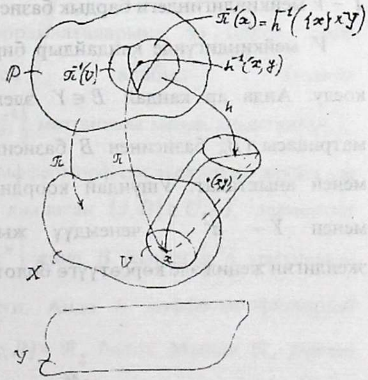
Демек, π_1 – раңгы n ге барабар болгон дифференцирленүүчү чагылтуу экен. Ушуга эле окшош, π_2 – рангы p га барабар болгон дифференцирленүүчү чагылтуу экендигине ишенүүгө болот.

Эми биз катмарланган көптүспөлдүүлүк жөнүндө жалпы түшүнүк киргизебиз (бул түшүнүк локалдык түрдө караганда эки көптүспөлдүүлүктүн көбөйтүндүсүнө келет).

P, X, Y – жылма көптүспөлдүүлүктөр болсун. Төмөндөгүдөй компонеталардан турган (P, X, Y, π) төрттүгү ***катмарланган көптүспөлдүүлүк*** (же ***катмарланыш***) деп аталат:

$P-$ катмарлануу мейкиндиги; $X-$ базасы; $Y-$ типтүү (же стандарттуу) катмар; $\pi : P \to X$ – төмөндөгүдөй шартты канааттандыра тургандай сюрьективдүү дифференцирленүүчү (проекциялоо деп аталуучу) чагылтуу: ар бир $x \in X$ чекити үчүн U ачык чеке-бели жана $h : \pi^{-1}(U) \to U \times Y$ диффеоморфизми (катмарланыштын картасы деп аталуучу) жашап, $\forall x \in U,\ \forall y \in Y : \pi\left(h^{-1}(x, y)\right) = x$ орун алат. Мындай U сыяктуу чеке-белдердин бардыгы X базасынын каптоосун түзүшөт, ал эми h сыяктуу тиешелеш диффеоморфизмдердин көптүгү катмарланыштын атласын түзүшөт. $\pi^{-1}(x)$ көптүгү ***x чекитинин үстүндөгү катмар*** деп аталат.

Эгерде катмарланыштын $U = X$ боло тургандай картасы жашаса, анда катмарланыш тривиалдык катмарланыш деп аталат. Бул учурда $P-$ $X \times Y$ көбөйтүндүсүнө диффеоморфтуу болот, ал эми π чагылтуусу P ны X ке табигый проекциялоо болот. Жалпы учурда катмарланыш локалдык түрдө гана тривиалдык катмарланыш болот. Ар дайым



$dim\,P = dim\,X + dim\,Y$.

6-чийме

Катмарланган көптүспөлдүүлүктүн мисалдарын карайлы.

1. Ар кандай X жана Y C^k – көптүспөлдүүлүктөрү үчүн $(X \times Y, X, Y, \pi)$ катмарланган көптүспөлдүүлүгүн түзүүгө болот. Мында $\pi : X \times Y \to X$ – табигый проекцилоо. Бул катмарланыш – тривиалдык катмарланыш болуп эсептелет.

2. Реперлердин катмарланган көптүспөлдүүлүгү

X – жылма көптүспөлдүүлүк; $P = \{\Re_x / x \in X\} - X$ көптүспөлдүүлүгүнүн бардык чекиттериндеги реперлердин көптүгү $(dim\,X = n)$; $V - n$ – ченемдүү вектордук мейкиндик (R талаасынын үстүндө аныкталган): $Y - V$ мейкиндигиндеги бардык базистердин көптүгү болсун.

V мейкиндигүнде кандайдыр бир B_o базисин бекемдеп коелу. Анда ар кандай $B \in Y$ элементи $\|a_j^i\|$ кубулбаган матрицасы (B_o базисинен B базисине өтүүнүн матрицасы) менен аныкталат. Ушундай координациялоонун жардамы менен $Y - n^2$ - ченемдүү жылма көптүспөлдүүлүк экендигин жеңил эле көрсөтүүгө болот.

$\varphi - x \in X_n$ чекитинин U чеке-белиндеги карта болсун: $\varphi(x) = (x^1,...,x^n)$. Анда $\Re_x$ реперинин $(x \in U)$ координаталык векторлорун $X_i = \xi_i^k \partial_k$ көрүнүшүндө туюнтууга болот, мында $det\left\|\xi_i^k\right\| \neq 0$. x^i, ξ_i^k өзгөрүлмөлөрүн $\Re_x \in P$ реперинин координаталары деп айтабыз. Бул координациялоодо P көптүгү жылма көптүспөлдүүлүк болот жана $dim\, P = n + n^2$.

$\pi : P \to X$ проекциялоосун ушундайча аныктайлы: $\forall \Re_x \in P : \pi(\Re_x) = x$. π – сюръективдүү жана дифференцирленүүчү чагылтуу экендиги түшүнүктүү. $\pi^{-1}(U)$ көптүгү - башталыш чекиттери $x \in U$ болгон бардык $\Re_x$ реперлердин көптүгү. $h : \pi^{-1}(U) \to U \times Y$ чагылтуусун төмөндөгүдөй аныктайлы. Эгерде $\Re_x \in \pi^{-1}(U)$ репери φ картасында (x^i, ξ_i^k) координаталарына ээ болсо, анда $h(\Re_x) = (x, B)$ деп алабыз (мында $x = \varphi^{-1}(x^1,...,x^n)$, B – $\left\|\xi_i^k\right\|$ матрицасы менен аныкталган Y тен алынган базис). h – диффеоморфизм экендигин жеңил эле көрсөтүүгө болот. Эми каалаган $(x, B) \in U \times Y$ элементин алалы. $\varphi(x) = (x^1, x^2,...,x^n)$ жана B базиси $\left\|в_i^k\right\|$ матрицасы менен аныкталган болсун. Анда h диффеоморфизминин аныктоосу боюнча $h^{-1}(x, B) = \Re_x$ болот. Мында $\Re_x$ репери

$\left(x^i, в_j^k\right)$ координаталарына ээ болот. Ошондуктан, $\pi\left(h^{-1}(x, B)\right) = x$ болот. Демек, (P, X, Y, π) - ***катмарланган мейкиндик*** жана аны ***реперлердин катмарланган көптүспөлдүүлүгү*** деп аташат.

II ГЛАВА. СЫРТКЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ФОРМАЛАР

§ 7. Көптүспөлдүүлүккө жаныма катмарланыш. Вектордук талаалар жана дифференциалдык формалар

X_n – дифференцирленүүчү C^{k+1} – көптүспөлдүүлүк, $T(X_n)=\bigcup\limits_{x\in X_n} T_x$ – X_n көптүспөлдүүлүгүнүн бардык жаныма векторлорунун көптүгү, φ $\left(\varphi(x)=\left(x^1,x^2,...,x^n\right)\right)$ аныкталуу аймагы U көптүгү болгон X_n көптүспөлдүүлүгүндөгү карта болсун. Төмөндөгүдөй закондун негизинде аныкталган $\overline{\varphi}:\bigcup\limits_{x\in U} T_x\to R^n\times R^n$ чагылтуусун карайлы: эгерде $X=\xi^i\partial_i\in T_x$ болсо, анда $\overline{\varphi}(X)=\left(x^1,...,x^n,\xi^1,...,\xi^n\right)$ болот. Демек, эгерде $\overline{\varphi}(X)=\left(\overline{\varphi}^i(X),\overline{\varphi}^{n+i}(X)\right)$ деп белгилесек, анда $\overline{\varphi}^i(X)=x^i$ – x чекитинин φ картасындагы координаталары, ал эми $\overline{\varphi}^{n+i}(X)=\xi^i$ – X векторунун $(\partial_i)_x$ табигый репериндеги координаталары болот.

$\overline{\varphi}$ чагылтуусу $T(U)=\bigcup\limits_{x\in U} T_x$ көптүгүн $\varphi(U)\times R^n$ көптүгүнө биективдүү чагылтуу экендиги түшүнүктүү. Бул чагылтуу $T(X_n)$ көптүгүндө φ ***картасы менен ассоцирленген карта*** деп аталат. $T(X_n)$ көптүгүндө $\overline{\varphi}$ карталары гомеоморфизмдер боло тургандай топологияны (бир маанилүү) аныктоого боло тургандыгын көрсөтүүгө болот. Мындай карталардын көптүгү А $-C^k$ классына таандык атласты түзөт, ал эми бул атлас болсо $T(X_n)$ көптүгүндө дифференциленүүчү структураны аныктайт. Демек, $T(X_n)-$ $2n$ ченемдүү жылма көптүспөлдүүлүк болот.

$\pi : T(X_n) \to X_n$ табигый проекциалоону төмөндөгүдөй аныктайбыз: $\forall X \in T_x : \pi(X) = x$.

π –сюръективдүү чагылтуу экендиги түшүнүктүү. $X \in T_x$ векторун алалы. Анда $\overline{\varphi}(X) = \left(x^1,...,x^n, \xi^1, \xi^2,...,\xi^n\right)$, $\pi_1 - R^n \times R^n$ көптүгүн R^n ге проекциялоо болсун. Анда $\pi_1 \circ \overline{\varphi}(X) = \left(x^1, x^2,...,x^n\right) = \varphi(x)$. Демек, $x = \pi(X)$ чекитинин φ картасындагы коодинаталары X векторунун $\overline{\varphi}$ ассоцирленген картасындагы биринчи n координатасы болот. Ошондуктан, π проекциялоосу дифференцирленүүчү чагылтуу болот.

Эгерде $x \in X_n$ болсо, анда $\pi^{-1}(x) = T_x$ $-x$ чекитинин үстүндөгү катмар. Бул учурда типтүү катмар болуп R талаасынын үстүндө аныкталган $n-$ ченемдүү V вектордук мейкиндиги эсептелет. V мейкиндигинин кандайдыр бир B_o базисин алалы.

Төмөндөгүдөй закондун негизинде аныкталган $h : \pi^{-1}(U) \to U \times V$ чагылтуусун карайбыз: эгерде

$X \in T_x \subset \pi^{-1}(U)$ болсо, анда $h(X) = (x, \vec{\vartheta})$ (мында $\vec{\vartheta}$ $- X$ вектору (∂_i) базисинде кандай координаталарга ээ болсо, так эле ошондой координаталарга B_o базисинде ээ болгон вектор). $h-$ диффеоморфизм экендигин жеңил эле байкоого болот.

$h(X) = (x, \vec{\vartheta})$ болгондуктан, $h^{-1}(x, \vec{\vartheta}) = X \in T_x$ алабыз, π проекциялоосунун аныктоосу боюнча төмөндөгүнү алабыз:

$$\forall x \in U, \, \forall \vec{\vartheta} \in V : \pi\left(h^{-1}(x, \vec{\vartheta})\right) = x.$$

Ошентип, $(T(X_n), X_n, V, \pi)$ төрттүгү катмарланган мейкиндик болот. Мында $T(X_n)-$ катмарлануу мейкиндиги болуп эсептелет. Бул катмарланган мейкиндик X_n көптүспөлдүүлүгүнө ***жаныма боо*** (же ***жаныма катмарланыш***) деп аталат.

$T^*(X_n) = \underset{x \in X_n}{\cup} T_x^*$ $-$ X_n көптүспөлдүүлүгүнө жаныма ковекторлордун көптүгү болсун. Жогорудагыга окшош эле $T^*(X_n)$ көптүгүндө жылма көптүспөлдүүлүктүн структурасын аныктап, $(T^*(X_n), X_n, V^*, \pi)$ катмарланган көптүспөлдүүлүгүнө ээ болобуз. Бул катмарланган көптүспөлдүүлүктү X_n көптүспөлдүүлүгүнө ***ковариянттык жаныма катмарланыш*** деп аташат.

Кандайдыр бир (P, X, Y, π) катмарланышы жана $U \subset X_n$ ачык камтылуучу көптүгү берилсин. U көптүгүнүн үстүндө берилген C^k классына таандык ***кесилиш*** деп $\pi \circ s = id_U$ шартын канааттандыра тургандай $s : U \to P$ чагылтуусун айтабыз (мында $id_U -$ U көптүгүн өзүнө теңдеш чагылтуу). Демек, $\forall x \in U : s(x) \in \pi^{-1}(x)$

$s : U \to P$ - ар бир $x \in U$ чекитине бул чекиттин үстүндөгү катмардын анык бир элементин тиешелеш кое тургандай функция деп айтууга болот.

$(T(X_n), X_n, V, \pi)-$ жаныма катмарланышын карайбыз. $X_n -$көптүспөлдүүлүгүндө аныкталган, C^k классына таандык ***вектордук талаа*** деп $T(X_n)$ жаныма катмарланышынын C^k- кесилишин айтабыз. Эгерде $X -$ вектордук талаа болсо, анда $X\Big|_x \in \pi^{-1}(x) = T_x$ болот. Айталы φ аркылуу $x \in X_n$ чекитинин чеке-белиндеги картаны белгилейли. Анда $X = \xi^i \partial_i$ (ар бир $x \in U$ чекитинде) болот. X вектордук талаасы C^k классына таандык болот, качан гана ξ^i функциялары C^k классына таандык болушса. X вектордук талаасы бүтүндөй X_n көптүспөлдүүлүгүндө эмес, кандайдыр бир $G \subset X_n$ аймагында гана аныкталган болушу мүмкүн.

G аймагында σ жылма сызыктарынын дифференцирленүүчү көптүгү берилсин жана ар бир $x \in G$ чекити аркылуу бир гана $\gamma \in \sigma$ сызыгы өтсүн дейли. x чекитинин U чекесинде аныкталган φ картасын алалы: $\varphi(x) = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$.

$x \in \gamma$ сызыгы φ картасында төмөндөгүдөй параметрдик теңдемелери менен аныкталат: $x^i = x^i(t), t \in J$.
Мында J – R сандык огунун кандайдыр бир интервалы, ал эми $x^i(t)$ – J аралыгында дифференцирленүүчү функция жана $\dfrac{dx^i}{dt}$ туундусу J аралыгынын бир да чекитинде нөлгө айланбайт.

X_n көптүспөлдүүлүгүндөгү ар кандай $f \in C^k$ функциясы γ сызыгында t дан көз каранды функция болуп калат жана

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} \text{ же } \frac{d}{dt}(f) = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}(f).$$

Демек,

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{x\in\gamma} = \frac{dx^i}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x\in\gamma} \in T_x$$

векторуна ээ болобуз жана бул векторду γ сызыгынын x чекитиндеги ***жаныма вектору*** деп айтабыз.

Ошентип, $G \subset X_n$ аймагындагы берилген σ жылма сызыктарынын көптүгү боюнча $T(X_n)$ жаныма катмарланышынын кесилишин аныктай алабыз, б.а. $s(x) = \dfrac{dx^i}{dt}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x\in\gamma}$ закону боюнча G аймагында вектордук талааны аныктай алат экенбиз (мында γ – σ көптүгүнөн алынган, x чекити аркылуу өтүүчү сызык).

σ көптүгүнүн сызыктарынын башка параметризациясы $x^i = x^i(\tau)$ $(\tau \in I')$ үчүн I сандык аралыгын I' сандык аралыгына чагылтуучу $\tau = \tau(t)$ C^k – диффеоморфизми жашап, $I \to X_n$, $I' \to X_n$, C^k – чөгөрүүлөрү эквиваленттүү болушат (сызыктын аныктоосун карагыла). Ар бир $x \in \gamma$ чекитинде жаныма векторго ээ болобуз:

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\left(\frac{d}{dt}\right)_{x\in\gamma} \tag{1}$$

G аймагында векторлордун жаңы талаасы пайда болот (σ көптүгүнүн сызыктарына жаныма болушкан) жана бүл талаа ушул эле сызыктарга жаныма болушкан векторлордун эски талаасы аркылуу (1) формула боюнча туюнтулат.

Тескерисинче, X – X_n көптүспөлдүүлүгүндө аныкталып, C^k – классына таандык болгон жана эч бир $x \in X_n$ чекитинде нөлгө барабар болбогон вектордук талаа болсун. φ – U аймагында аныкталган карта жана $\varphi(x) = (x^1, \ldots, x^n)$ болсун. Анда $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (мында ξ^i – U аймагында аныкталышкан C^k классына таандык функциялар) болот. Төмөндөгүдөй кадимки дифференциалдык теңдемелердин системасын карайбыз:

$\frac{dx^i}{dt} = \xi^i\left(x^1, x^2, \dots, x^n\right)$, мында x^i лер t дан көз каранды болушкан белгисиз функциялар. Мындай системанын чечимдеринин жашашы жөнүндөгү белгилүү теорема боюнча ушундай бир $\delta > 0$ жана $\varepsilon > 0$ сандары табылып, $\forall\left(x_o^1, x_o^2, \dots, x_o^n\right)$ үчүн эгерде $\left|x_o^i\right| < \delta$ болсо, анда $x^i\left(0, x_o^j\right) = x_o^j$ баштапкы шартын канааттандыра тургандай $|t| < \varepsilon$ үчүн аныкталган жалгыз гана $x^i = x^i\left(t, x_o^j\right)$ чечимине ээ болот. Ошентип, кандайдыр бир $G \subset U$ аймагында $x^i = x^i\left(t, x_o^j\right)$ жылма сызыктарынын σ көптүгү жашап, алардын жанымa векторлорунун талаасы болуп, берилген X талаасы эсептелет. σ көптүгүнүн сызыктары X ***вектордук талаасынын интегралдык сызыктары*** деп аталышат.

X_n көптүспөлдүүлүгүндөгү X, Y вектордук талааларын карайлы жана φ картасында $X = \xi^i \partial_i$, $Y = \eta^j \partial_j$ (мында $\xi^i, \eta^j - C^k$ классына таандык функциялар) көрүнүшүндө туюнтулган болсун.

Эгерде $f - X_n$ де аныкталган C^k классына таандык функция болсо, анда

$$Y(f)=\eta^j\partial_j f,\ XY(f)=X\left(\eta^j\partial_j f\right)=\xi^i\left(\partial_i\eta^j\partial_j f+\eta^j\partial^2_{ji}f\right),$$
$$X(f)=\xi^i\partial_i f,\ \ YX(f)=Y\left(\xi^i\partial_i f\right)=\eta^j\left(\partial_j\xi^i\partial_i f+\xi^i\partial^2_{ij}f\right).$$

Демек, $XY(f)-YX(f)=\left(\xi^i\partial_i\eta^j-\eta^i\partial_i\xi^j\right)\partial_j f$. Ошентип, биз жаңы вектордук талаага ээ болдук: $[X,Y]=XY-YX$. Бул вектордук талаа C^{k-1} классына таандык жана (∂_j) табигый реперинде төмөндөгүдөй координаталарга ээ болот:

$$\left(\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i}-\eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\right). \qquad (2)$$

$[X,Y]$ вектордук талаасы X жана Y талааларынын ***коммутатору*** же бул талаалар үчүн ***Линин кашаасы*** деп аталат.

Айрым учурду карайлы: $\partial_k=\delta^i_k\partial_i$ жана $\partial_\ell=\delta^j_\ell\partial_j$ вектордук талааларын алалы. Демек, (2) формуладагы $\xi^i=\delta^i_k$, $\eta^j=\delta^j_\ell$ деп эсептейбиз. Анда $[\partial_k,\partial_\ell]=0$ барбардыгына ээ болобуз, б.а. табигый репердин координаталык векторлорунун каалаган экөөнүн талааларынын коммутатору нөлгө барабар болот экен.

Линин кашаасы төмөндөгүдөй касиеттерге ээ экендигин жеңил эле текшерүүгө болот:

1^o. $[X,Y+Z]=[X,Y]+[X,Z]$,

2^o. $[X,fY]=(X(f))Y+f[X,Y],\ f\in C^k(X_n)$,

3^o. $[X,Y]=-[Y,X]$,

4^o. $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$,

(Якобинин теңдештиги)

5^o. $h_{*x}[X,Y]=[h_{*x}X,h_{*x}Y]$, $\forall x\in X_n$.

$h-X_n$ көптүспөлдүүлүгүн өзүнө чагылтуучу диффеоморфизм.

Жогорудагы касиеттердин далилдөөлөрүнө токтололу.

1) $X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=\eta^j\frac{\partial}{\partial y^j}$, $Z=\zeta^k\frac{\partial}{\partial x^k}$ болсун.

Анда $Y+Z=(\eta^j+\zeta^j)\frac{\partial}{\partial x^j}$. Ал эми $[X,Y+Z]$ вектору $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ реперинде (2) формула боюнча аныкталган координаталарга ээ болот, б.а.

$$\xi^i\frac{\partial(\eta^j+\zeta^j)}{\partial x^i}-(\eta^i+\zeta^i)\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}=\left(\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i}-\eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\right)+$$

$$+\left(\xi^i\frac{\partial\zeta^j}{\partial x^i}-\zeta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\right).$$

Бул болсо, $[X,Y]+[X,Z]$ векторунун ошол эле репердеги координаталары болуп эсептелет.

2) (2) формуладагы η^k нын ордуна $f\eta^k$ ны коюп, төмөндөгүнү алабыз:

$$\xi^i\frac{\partial(f\eta^j)}{\partial x^i}-f\eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}=\xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\eta^j+f\left(\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i}-\eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\right).$$

Бул болсо 2^o -касиеттин туура экендигин көрсөтөт.

3) $XY-YX=-(YX-XY)\Rightarrow[X,Y]=-[Y,X]$.

4) Каалагандай $f \in C_x^k$ функциясы үчүн төмөндөгүнү алабыз:

$$[X,[Y,Z]](f) = X[Y,Z](f) - [Y,Z]X(f) = \\ = XYZ(f) - XZY(f) - YZX(f) + ZYX(f). \qquad \text{(a)}$$

Ушуга эле окшош төмөндөгүлөргө ээ болобуз:

$$[Y,[Z,X]](f) = YZX(f) - YXZ(f) - ZXY(f) + XZY(f)$$

(б)

$$[Z,[X,Y]](f) = ZXY(f) - ZYX(f) - XYZ(f) + YXZ(f)$$

(в)

(а), (б), (в) барабардыктарын мүчөлөп кошолу:

$$([X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]])(f) = 0, \forall f \in C_x^k \text{ .(г)}$$

Нөлдүк вектордук талаа гана ар кандай функцияны нөлгө өткөрөт. Чындыгында эле, L ушундай вектордук талаа болсун:

$\forall f \in C_x^k : L(f) = 0$ жана $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$ реперинде $L = \lambda^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ болсун дейли. Демек, $\lambda^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i} = 0$. $f -$ каалагандай функция болгондуктан, $f = x^k$ деп алалы. Анда $\dfrac{\partial x^k}{\partial x^i} = \delta_i^k$ болот. Мындан $\lambda^i \delta_i^k = 0 \Rightarrow \lambda^k = 0$ келип чыгат. k га $1,2,\ldots,n$ маанилерин берүү менен бардык $\lambda^k = 0$ экендигин көрөбүз. Демек, $L = 0$ - нөлдүк вектордук талаа. Ошондуктан, (г) барабардыгынан 4^o келип чыгат.

5) Кандайдыр бир $h: X_n \to X_n$ диффеоморфизмин карайлы. $h(x) = y$ болсун, анын үстүнө $y = h(x)$ чекитинин V чеке-белинде координаталар аркылуу h диффеоморфизми төмөндөгүдөй туюнтулсун дейли:

$$y^i = y^i\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right).$$

h_{*x} чагылтуусу $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ реперинде λ^i координаталарына ээ болгон L векторун $\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{f(x)}$ реперинде $\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_{f(x)} \lambda^i$ координаталарына ээ боло тургандай L' векторуна которот. Биз карап жаткан учур үчүн төмөндөгүлөргө ээ болобуз:

$$h_{*x}X = \frac{\partial y^i}{\partial x^t}\xi^t \frac{\partial}{\partial y^i},\; h_{*x}Y = \frac{\partial y^j}{\partial x^s}\eta^s \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү киргизели: $\bar{\xi}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^t}\xi^t$, $\bar{\eta}^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^s}\eta^s$, (1) формула боюнча $\left[h_{*x}X, h_{*x}Y\right]$ вектору $\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{f(x)}$ реперинде $\bar{\xi}^i \frac{\partial \bar{\eta}^j}{\partial y^i} - \bar{\eta}^i \frac{\partial \bar{\xi}^j}{\partial y^i}$ координаталарына ээ болот. Төмөндөгүлөрдү табабыз:

$$\bar{\xi}^i \frac{\partial \bar{\eta}^j}{\partial y^i} = \bar{\xi}^i \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^s}\eta^s\right) = \frac{\partial y^i}{\partial x^t}\xi^t \frac{\partial}{\partial x^p}\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^s}\eta^s\right)\frac{\partial x^p}{\partial y^i} =$$

$$= \delta_t^p \xi^t \frac{\partial}{\partial x^p}\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^s}\eta^s\right) = \xi^t \frac{\partial}{\partial x^t}\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^s}\eta^s\right) = \xi^t \eta^s \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^s \partial x^t} + \xi^t \frac{\partial y^j}{\partial x^s}\frac{\partial \eta^s}{\partial x^t}$$

$$\bar{\eta}^i \frac{\partial \bar{\xi}^j}{\partial y^i} = \bar{\eta}^i \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^t}\xi^t\right) = \frac{\partial y^i}{\partial x^s}\eta^s \frac{\partial}{\partial x^p}\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^t}\xi^t\right)\frac{\partial x^p}{\partial y^i} =$$

$$= \delta_s^p \eta^s \frac{\partial}{\partial x^p}\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^t}\xi^t\right) = \eta^s \frac{\partial}{\partial x^s}\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^t}\xi^t\right) = \xi^t \eta^s \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^t \partial x^s} + \eta^s \frac{\partial y^j}{\partial x^t}\frac{\partial \xi^t}{\partial x^s}$$

Демек, $\bar{\xi}^i \frac{\partial \bar{\eta}^j}{\partial y^i} - \bar{\eta}^i \frac{\partial \bar{\xi}^j}{\partial y^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^s}\left(\xi^t \frac{\partial \eta^s}{\partial x^t} - \eta^t \frac{\partial \xi^s}{\partial x^t}\right)$,

бул болсо, $h_{*x}[X,Y]$ векторунун $\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{f(x)}$ репериндеги j – координатасы. Мындан 5^0 – барабардыктын орун ала тургандыгын көрөбүз.

X_n көптүспөлдүүлүгүн өзүнө чагылтуучу диффеоморфизмдердин $g_t : X_n \to X_n$ көптүгүн карайлы $(-\infty < t < \infty)$. Бул көптүк X_n көптүспөлдүүлүгүн ***дифференцирленүүчү өзгөртүп түзүүлөрдүн бир параметрдүү группасы*** (же X_n ***көптүспөлдүүлүгүндөгү агым***) деп аталат, эгерде $g(t,x) = g_t(x)$ закону боюнча аныкталган $g : R \times X_n \to X_n$ чагылтуусу төмөндөгү шарттарды канааттандырса:

1^o. g –дифференцирленүүчү,

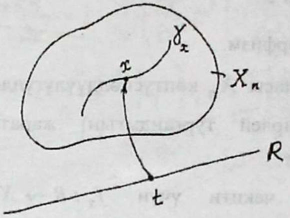
2^o. $g_{t+s} = g_t \circ g_s$, $\forall t,s \in R$,

3^o. g_o – теңдеш диффеоморфизм.

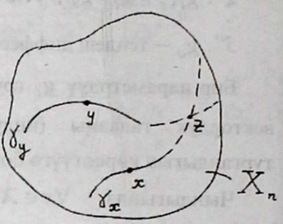
Бир параметрдүү g_t группасы X_n көптүспөлдүүлүгүндө вектордук талааны (индуцирлей тургандыгын) жарата тургандыгын көрсөтүүгө болот.

Чындыгында, $\forall x \in X_n$ чекити үчүн $f_x : R \to X_n$ чагылтуусун $f_x(t) = g_t(x)$, б.а. $f_x(t) = g(t,x)$ (мында x бекемделип коюлган) закону боюнча аныктайлы. 1^o шарт боюнча бул чагылтуу дифференцирленүүчү (7 - чийме).

$g_t - \{g_t\}$ группасынан алынган кандайдыр бир диффеоморфизм болсун. Эгерде $y = g_t(x)$ болсо, анда бул диффеоморфизм координаталар аркылуу төмөндөгүдөй туюнтулат: $y^i = y^i\left(t, x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$, мында барабардыктын оң жагындагы функциялар бардык өзгөрүлмөлөрү боюнча дифференцирленүүчү жана $\left(\partial y^i / \partial t\right)$– бир учурда нөлгө барабар болушпайт (эгерде бир учурда нөлгө барабар болушат деп эсептесек, анда g_t диффеоморфизми t дан көз каранды болбой калмак, бул болсо шартка каршы келет). Демек, ранг $\left\|\frac{\partial y^i}{\partial t}\right\| = 1$. Ошондуктан f_x чагылтуусу R көптүгүн X_n ге чагылтуучу кандайдыр бир C^k – чөгөрүү болот жана ал $\gamma_x \subset X_n$ жылма сызыгын аныктайт. $t = 0$ болгондо $f_x(0) = g_o(x) = x$ (3- шартты карагыла) болот, б.а. $x \in \gamma_x$.



7 - чийме.



8 - чийме.

Ошентип, X_n көптүспөлдүүлүгү γ_x жылма сызыктарынын көптүгү менен капталган болот. Чындыгында бул капталыш ажыралыш болуп эсептелет. Ушундай экендигин далилдөө үчүн, эгерде $y \notin \gamma_x$ болсо, анда $\gamma_y \cap \gamma_x = \varnothing$ экендигин текшерүү жетиштүү. Каршысынан болжолдойлу: $y \in \gamma_x$ жана $z \in \gamma_y \cap \gamma_x$ (8-чийме) деп алалы. $z \in \gamma_x \Rightarrow z = g_{t_1}(x)$, $\quad z \in \gamma_y \Rightarrow z = g_{t_2}(x)$. Мындан $g_{t_1}(x) = g_{t_2}(x)$. Демек,

$$y = g_{t_2}^{-1} \circ g_{t_1}(x) \qquad (*)$$

2) шарттан $g_t \circ g_{-t} = g_{t+(-t)} = g_o$ –теңдеш диффеоморфизм экендиги келип чыгат. Демек, $g_t^{-1} = g_{-t}$. Ошондуктан

$$g_{t_2}^{-1} \circ g_{t_1} = g_{-t_2} \circ g_{t_1} = g_{(-t_2)+t_1} = g_{t_1 - t_2}.$$

(*) барабардыгы төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет: $y = g_{t_1 - t_2}(x)$. Мындан $y \in \gamma_x$ экендиги келип чыгат. Бул болсо шартка каршы келет. Демек, $\gamma_y \bigcap \gamma_x = \varnothing$. X_n көптүспөл-дүүлүгү жылма сызыктардын $(\gamma_x)_{x \in X_n}$ көптүгү менен ушундайча капталган: ар бир $x \in X_n$ чекити аркылуу бул көптүктүн бирден гана сызыгы өтөт. Ушул көптүктүн сызыктарынын жаныма векторлорунун X талаасы g_t группасы тарабынан индуцирленген вектордук талаа болот.

Тескерисинче, X_n көптүспөлдүүлүгүндө X вектордук талаасы берилген болсун. Жалпы учурда берилген X вектордук талаасын индуцирлей турган $g_t : X_n \to X_n$ өзгөртүп түзүүлөрдүн бир параметрдүү группасы жашабайт. Бирок локалдык түрдө мындай группа жашайт.

Каалаган $x \in X_n$ чекитинин кандайдыр бир чеке-белинде өзгөртүп түзүүлөрдүн бир параметрдүү локалдык группасы жашап, ушул чеке-белде берилген X вектордук талаасын индуцирлейт [12].

Төмөндөгүдөй теорема орун алат:

Теорема2.1. X_n жылма көптүспөлдүүлүгүндө X вектордук талаасы берилген болсун. Каалаган $x \in X_n$ чекити үчүн анын ушундай бир U чеке-бели, $\varepsilon > 0$ саны жана дифференцирленүүчү $g_t : U \to X_n (|t| < \varepsilon)$ чагылтуулардын жалгыз гана көптүгү жашап, төмөндөгү үч шарт орун алат:

1) $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to X_n | g(t, x) = g_t(x)$ чагылтуусу дифференцирленүүчү;

2) Эгерде $|t|,\ |s|,\ |t+s|<\varepsilon$ жана $x, g_t(x)\in U$ болсо, анда $g_{s+t}(x)=g_s\circ g_t(x)$;

3) $x\in U$ чекити үчүн $X|_x$ вектору $\gamma_x : t\to g_t(x)$ сызыгынын жаныма вектору болот.

Далилдөө. x чекити φ картасынын V координаталык чеке-белине таандык болсун дейли жана

$$\varphi(x)=\left(x^1,x^2,\dots,x^n\right),\ X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

болсун. Төмөндөгүдөй кадимки дифференциалдык теңдемелердин системасын жазалы:

$$\frac{\partial x^i}{\partial t}=\xi^i\left(x^1,x^2,\dots,x^n\right). \tag{1}$$

(1) көрүнүштөгү системанын чечимдеринин жашашы жөнүндөгү теорема боюнча ушундай $\delta_1>0,\ \ \varepsilon_1>0$ сандары жашап, (1) система $x^i\left(0,x_o^j\right)=x_o^i$ (мында $\left|x_o^j\right|<\delta_1$) баштапкы шартын канааттандыра тургандай жана $|t|<\delta_1$ үчүн аныкталган жалгыз гана $x^i\left(t,x_o^j\right)$ чечимине ээ болот. Мында $x^i\left(t,x_o^j\right)$ функциялары өздөрүнүн бардык өзгөрүлмөлөрү боюнча дифференцирленүүчү функциялар. Бул функциялар үзгүлтүксүз болушкандыктан, эгерде жетишерлик кичине $\varepsilon\le\varepsilon_1$ жана $\delta\le\delta_1$ сандарын тандап алсак, анда $|t|<\varepsilon$ жана

$|x_o^j| < \delta$ үчүн $x^i(t, x_o^j) \in \varphi(V)$ болот. K_δ аркылуу R^n мейкиндигиндеги $n-$ченемдүү ачык координаталык кубду белгилейли: $|x_o^j| < \delta$ жана $U = \varphi^{-1}(K_\delta)$. $g_t : U \to X_n$ чагылтуусун $g_t(x) = y$ барабардыгы менен аныктайлы. Эгерде $\varphi(x) = (x^1, ..., x^n)$ болсо, анда $\varphi(y) = (y^1, ..., y^n)$ болот. Мында

$$y^i = x^i(t, x^1, x^2, ..., x^n) \qquad (\wedge)$$

Демек, $(\wedge)$ формулалары g_t чагылтуусунун координаталар аркылуу туюнтулушу.

$g(t,x) = g_t(x) = y$ закону боюнча аныкталган $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to X_n$ чагылтуусу дифференцирленүүчү экендиги түшүнүктүү (y чекитинин φ картасындагы координаталары $(\wedge)$ формулалары менен аныкталган жана андагы барабардыктын оң жагындагы функциялар дифференцирленүүчү). Демек теоремадагы 1) шарт аткарылат экен.

$\bar{x}^i(t, x_o^j) = x^i(s + t, x_o^j)$ функциялары (1) системанын $\bar{x}^i(0, x_o^j) = x^i(s, x_o^j)$ баштапкы шартын канааттандыруучу чечими болуп эсептелет. $x_o, g_s(x_o) \in U$ болсун дейли. Анда (1) системанын $x^i(t, x^j(s, x_o^k)) = \bar{\bar{x}}^i(s, x_o^j)$ чечимин кароого болот. Мындан $\bar{\bar{x}}^i(0, x_o^j) = x^i(t, x_o^j) = \bar{x}^i(0, x_o^j)$ келип чыгат. Баштапкы шарттар жалгыз гана чечимди аныкташкандыктан, $x^i\left(t,x^j\left(s,x_o^k\right)\right)=x^i\left(s+t,x_o^k\right)$. Бул болсо, $g_s\circ g_t(x_o)=g_{s+t}(x_o)$ экендигин, б.а. теореманын 2) шартынын аткарыла тургандыгын көрсөтөт. 3) шарттын аткарылышы (1) барабардыктардан көрүнүп турат.

$G - X_n$ көптүспөлдүүлүгүнүн ачык камтылуучу көптүгү (айрым учурда $G=X_n$) болсун. Жөнөкөйлүк үчүн X вектордук талаасы – C^∞ классына таандык деп алабыз жана G көптүгүндө аныкталган, C^∞ классына таандык вектордук талааларды карайбыз. Мындай вектордук талаалардын көптүгүн $D^1(G)$ аркылуу белгилейбиз. Бул көптүктө кандай математикалык структураны табигый түрдө аныктоо мүмкүн экендигин көрсөтөлү. Адегенде алгебра курсунун кээ бир түшүнүктөрүн эске салабыз.

1) A – алкак, Ω – операторлордун көптүгү болсун. Эгерде A алкагында сырткы композиция закону $f:\Omega\times A\to A$ $\left(f(\lambda,a)=\lambda a\right)$ аныкталып, төмөндөгү шарттар аткарылса:

а) $\lambda(a+в)=\lambda a+\lambda в$ $\quad(\forall\lambda\in\Omega,\ \forall a,в\in A)$,

б) $\lambda(aв)=(\lambda a)в=a(\lambda в)$,

анда A – операторлору менен берилген алкак деп аталат.

2) M – коммутативдик группа (аддитивдик амалга карата) болсун жана анда сырткы композиция закону аныкталган болсун:

$$f:A\times M\to M\ \left(f(\alpha,m)=\alpha m\right)$$

(операторлордун көптүгү болуп, A алкагы алынган). Эгерде f чагылтуусу төмөндөгү үч шартты канааттандырса:

$$а)\ \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \quad (\forall \alpha \in A, \forall x, y \in M),$$

$$б)\ (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,$$

$$в)\ \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x,$$

анда M көптүгү A алкагынын үстүндө берилген ***сол модуль*** (же ***сол*** A***–модуль***) деп аталат.

Ушуга эле окшош ***оң*** A***–модуль*** түшүнүгү аныкталат (A көптүгүнөн алынган операторлор M көптүгүнүн элементтерине оң жактан колдонулат). Эгерде A алкагы коммутативдик алкак болсо, анда сол модуль жана оң модуль түшүнүктөрү дал келишет. Эгерде A алкагы ε бирдигине ээ болсо (ε–нейтралдык оператор катары кызмат кылса: $\forall x \in M : \varepsilon x = x$), анда M A–модулу ***унитардык*** A ***- модуль*** деп аталат.

Эгерде A алкагы үчүн K талаасын алып, унитардык K–модулду аныктасак, анда биз K талаасынын үстүндө аныкталган вектордук мейкиндикке ээ болобуз. Ошентип, модуль түшүнүгү вектордук мейкиндик түшүнүгүнүн жалпыланышы болуп эсептелет экен.

3) A - бирдик элементи менен берилген коммутативдик алкак, M– унитардык A– модуль болсун. Эгерде M унитардык A– модулу – операторлору менен берилген алкак болсо жана операторлордун көптүгү катары A алкагы кызмат кылса, анда M– A алкагынын үстүндө берилген

алгебра же $A-$***алгебра*** (же A нын үстүндө берилген ***гиперкомплекстүү система***) деп аталат.

Айрым учурда, $R-$ алгебра дегенибиз – бул R талаасынын үстүндө аныкталган вектордук мейкиндик жана ал вектордук мейкиндикте дагы бир ички композиция закону (скалярдык көбөйтүү амалынан башка) – көбөйтүү ушундайча аныкталган: V вектордук мейкиндиги – операторлору менен берилген алкак болуп калат жана операторлордун көптүгү катары R талаасы кызмат кылат.

$F(G)$ аркылуу G көптүгүндө аныкталган жана C^∞ классына таандык чыныгы функциялардын көптүгүн белгилейли. Бул көптүктө R чыныгы сандардын талаасынын үстүндө аныкталган вектордук мейкиндиктин структурасын аныктоого болот. Эгерде $f,g\in F(G)$ $\alpha,\beta\in R$ болсо, анда $\alpha f+\beta g\in F(G)$ функциясын төмөндөгүдөй аныктайбыз:

$$\forall x\in G:(\alpha f+\beta g)x=\alpha f(x)+\beta g(x).$$

Анан дагы $(fg)(x)=f(x)g(x)$ деп алабыз.

$F(G)$ көптүгү R талаасынын үстүндө аныкталган алгебра (кыскача $R-$алгебра) боло тургандыгын жеңил эле көрсөтүүгө болот.

Жогоруда биз $D^1(G)$ аркылуу G көптүгүндө аныкталган жана C^∞ классына таандык болгон бардык вектордук талаалардын көптүгүн белгилегенбиз. Бул көптүктө кошуу жана $F(G)$ алкагынын элементтерине көбөйтүү амалдарын аныктайлы: эгерде $X,Y\in D^1(G)$, $f,g\in F(G)$ болсо, анда

$(X+Y)(g)=X(g)+Y(g)$, $(fX)(g)=fX(g)$ деп алабыз. Эми $D^1(G)$ көптүгү $F(G)$ акагынын үстүндө берилген унитардык модуль боло тургандыгын жеңил эле текшерүүгө болот.

Бирок, $D^1(G)$ көптүгүндө алгебралык структураны башкача да аныктоого болот. Бул көптүк R талаасынын үстүндө аныкталган вектордук мейкиндик экендиги түшүнүктүү. Линин кашаасы [,] бул көптүктө экинчи ички композиция законун - көбөйтүүнү аныктайт. Демек, $D^1(G)$ көптүгү операторлору менен берилген алкак болот жана операторлорунун көптүгү болуп R талаасы эсептелет. Ошентип, $D^1(G)$ көптүгү R- алгебра болот экен.

Эгерде алгебрада көбөйтүү антикоммутативдүү болуп жана Якобинин теңдештигин канааттандырса, анда аны ***Линин алгебрасы*** деп аташат.

Демек, $D^1(G)$ көптүгү R талаасынын үстүндө берилген Линин алгебрасы болот экен, эгерде көбөйтүү амалы үчүн Линин кашаасы алынган болсо.

$\left(T^*(X_n), X, V^*, \pi\right)$ катмарланышын карайлы.

$G-$ X_n дин ачык камтылуучу көптүгү болсун (айрым учурда $G=X_n$ болушу мүмкүн).

G көптүгүндө аныкталган жана C^k классына таандык болгон ***ковектордук талаа*** (же ***сызыктуу дифференциалдык форма*** же *1−* ***форма***) деп, $T^*(X_n)$ ***катмарланышынын*** G

көптүгүнүн үстүндө аныкталган C^k ***−кесилишин*** айтышат. Эгерде ω - $1-$ форма, $x \in G$ болсо, анда $\omega\big|_x \in \pi^{-1}(x) = T_x^*$ болот. Ошондуктан, эгерде φ − x чекитинин $U \subset G$ чеке-белиндеги карта болсо, анда $\omega = a_i dx^i$ (ар бир $x \in U$ чекитинде) болот. ω сызыктуу дифференциалдык формасы C^k классына таандык болушу үчүн a_i функцияларынын C^k классына таандык болушу зарыл жана жетиштүү.

$D_1(G)$ аркылуу X_n көптүспөлдүүлүгүнүн G ачык камтылуучу көптүгүндө аныкталышкан жана C^∞ классына таандык болушкан бардык $1-$ формалардын көптүгүн белгилейбиз. Эгерде $\omega^1, \omega^2 \in D_1(G)$ болсо, анда ар бир $U \subset G$ координаталык чеке − белинде $\omega^1 = a_i^1 dx^i$, $\omega^2 = a_i^2 dx^i$ барабардыктарына ээ болобуз. $\alpha, \beta \in R$ сандарын алалы да, $\alpha\,\omega^1 + \beta\,\omega^2 = \left(\alpha a_i^1 + \beta a_i^2\right) dx^i$ $1-$ формасын аныктайлы. G көптүгүндө аныкталган бул жаңы $1-$ формасы $D_1(G)$ көптүгүнө таандык болот. Ошентип, $D_1(G)$ көптүгү R талаасынын үстүндө берилген вектордук мейкиндик болот.

Эгерде $f, g \in F(G)$ болсо, анда ар бир $U \subset G$ координаталык чеке-белде $f\omega^1 + g\omega^2 = \left(fa_i^1 + ga_i^2\right) dx^i$ деп алалы. Бул учурда $D_1(G)$ көптүгү унитардык $F(G)$ - модуль боло тургандыгын жеңил эле көрсөтүүгө болот.

$A-$ бирдик элементи бар коммутативдик алкак, ал эми $M-$ A алкагынын үстүндө берилген унитардык модуль болсун. M^* аркылуу M модулун A алкагына чагылдыруучу бардык сызыктуу чагылтуулардын көптүгүн белгилейли, б.а.

$$\theta : M \to A,\ \forall a, в \in A, \forall x, y \in M : \theta(ax + вy) = \alpha\theta(x) + в\theta(y).$$

Алгебра курсунда M^* көптүгү да унитардык $A-$ модуль боло тургандыгы далилденет. Бул модуль M ***модулуна түйүндөш модуль*** деп аталат.

Ар бир $x \in G$ чекитинде $X \in D^l(G)$ вектордук талаасы $X|_x \in T_x$ векторун, ал эми $\omega \in D_l(G)$ сызыктуу формасы $\omega|_x \in T_x^*$ ковекторун аныктайт. Ушул закон боюнча $D_l(G)$ жана $D^l(G)$ - $F(G)$ модулдары ар бир $x \in G$ чекитинде T_x жана T_x^* (R талаасынын үстүндө аныкталган) вектордук мейкиндиктерин аныкташат. Бул вектордук мейкиндиктер ар бир $x \in G$ чекитинде түйүндөш болушат. Мындан $D_l(G)$ $F(G)-$ модулу $D^l(G)$ $F(G)$ - модулуна түйүндөш болушу келип чыгат.

X_n көптүспөлдүүлүгү параллелдештирилүүчү көптүспөлдүүлүк деп аталат, эгерде $T(X_n)$ жаныма катмарланышынын n сандагы сызыктуу көз карандысыз эмес кесилиши жашаса, б.а. ушундай $X_i \in D^l(X_n)$ вектордук талаалары жашап, ар бир $x \in X$ чекити үчүн $X_i|_x$ векторлору T_x мейкиндигинин базисин түзүшсө. Бул учурда ар бир $x \in X_n$ чекити үчүн $\omega^j\Big|_x$ ковекторлору T_x^* мейкиндигинин базисин түзө тургандай n сандагы сызыктуу көз каранды эмес $\omega^j \in D_1(X_n)$ 1-формалардын системасын аныктоого болот.

ω^j формаларын $\left\{\omega^i\big|_x\right\}$ базиси $\left\{X_i\big|_x\right\}$ базисине түйүндөш боло тургандай тандап алууга болот:

$$\omega^j\big|_x\left(X_i\big|_x\right)=\delta_i^j, \quad \forall x \in X_n . \qquad (4)$$

Эгерде φ картасынын U чеке-белинде $X_i=\xi_i^k\partial_k$. $det\left\|\xi_i^k\right\| \neq 0$ болсо, анда $\omega^j=\tilde{\xi}_k^j dx^k$ деп алууга болот (мында $\left\|\tilde{\xi}_k^j\right\|=\left\|\xi_i^k\right\|^{-1}$). Ошондо биз (4) барабардыкты алабыз.

Эскертүү2.1. X_n – параллелдештирилүүчү болушу үчүн $T(X_n)$ жаныма катмарланышы тривиалдык катмарланыш болушу зарыл жана жетиштүү экендигин далилдөөгө болот.

Эскертүү2.2. 2. X_n көптүспөлдүүлүгүнүн параллелдештирилүүчү болушунун зарыл шарты болуп анда нөлдүк чекиттерсиз вектордук талаанын жашашы эсептелет. Топология курсунан төмөндөгүдөй теорема белгилүү: X_n жылма көптүспөлдүүлүгүндө нөлдүк чекиттерсиз вектордук талаанын жашашы үчүн ал көптүспөлдүүлүктүн эйлердик мүнөздөмөсү нөлгө барабар болушу зарыл жана жетиштүү: $\chi(X_n)=0$. Эгерде X – компактуу жана так ченемдүү болсо, анда $\chi(X)=0$ орун алат [3]. Атап айтканда, $\forall n$ үчүн S_{2n-1} сферасында нөлдүк чекиттерсиз жылма вектордук талаа жашайт, себеби $\chi(S_{2n-1})=0$. Бирок, $\chi(S_{2n})=2$ болгондуктан, жуп ченемдүү сферада ($S_2 \subset E_3$ кадимки сферасында да) мындай вектордук талаа жашабайт.

Эскертүү2.3. Параллелдештирилүүчү сфералар болуп S_1, S_3, S_7 сфералары гана эсептелине тургандыгын Милнор далилдеген. Башка так ченемдүү сфералардагы сызыктуу көз каранды эмес вектордук талаалардын саны сфералардын ченемдүүлүктөрүнөн кичине болот.

Эскертүү2.4. R^n сандык мейкиндиги параллелдештирилүүчү болот. Себеби, R^n мейкиндигинде сызыктуу көз каранды эмес n даана ∂_i вектордук талаалары жашайт. Демек, E_n евклиддик мейкиндиги, A_n аффиндик мейкиндиги да параллелдеш-тирилүүчү көптүспөлдүүлүктөр болушат.

P_n проективдүү мейкиндигинин модели катары E_{n+1} мейкиндигиндеги түз сызыктардын байламтасын алсак жана S_1, S_3, S_7 сфераларынын параллелдештирилүүчү көптүспөлдүү-лүктөр экендигин эске алсак, анда бардык проективдүү мейкиндиктердин ичинен P_1, P_3, P_7 мейкиндиктери гана параллелдештирилүүчү болуша тургандыгы келип чыгат.

5. Классикалык дифференциалдык геометрия курсунда A_n мейкиндигинин $p-$ ченемдүү V_p беттерин окуп үйрөнүүдө

ар бир $x \in V_p$ чекитинде V_p бетине жаныма болгон T_x вектордук мейкиндигине ээ болобуз. Бул учурда T_x көптүгүндө аффиндик же центроаффиндик мейкиндиктин структурасын аныктоо ыңгайлуу жана T_x көптүгүн A_n мейкиндигиндеги $p-$ ченемдүү тегиздик катары кароого болот. Аны V_p бетинин x чекитиндеги ***жаныма тегиздиги*** деп аташат жана $T_p(x)$ аркылуу белгилешет.

$T_p(x_1)$ жана $T_p(x_2)$ $(x_1 \neq x_2)$ жаныма тегиздиктери жалпы чекиттерге ээ болушу мүмкүн. Бирок, X_p көптүспөлдүү-лүгүнүн жаныма мейкиндиктери үчүн бул ырастоо орун албайт (себеби X_p көптүспөлдүүлүгүн камтып турган, сызыктуу структура аныкталган эч кандай мейкиндик жашабайт).

Бул эскертүү X_n көптүспөлдүүлүгүнүн геометриясы үчүн маанилүү болуп эсептелет. Себеби, $2n-$ ченемдүү көптүспөлдүүлүк катары жаныма катмарланышты түзүүдө $T_{x_1} \cap T_{x_2} = \varnothing$. $(x_1 \neq x_2)$ экендиги негизги мааниге ээ.

§ 8. Вектордук мейкиндиктердин тензордук көбөйтүндүсү. Тензорлор.

$V,W-$ K талаасынын үстүндө аныкталган вектордук мейкиндиктер болсун жана $dim V = n$, $dim W = m$. V

мейкиндигинин $(\vec{a}_i)_{1\le i\le n}$ базисин, W мейкиндигинин $(\vec{в}_t)_{1\le t\le m}$ базисин алалы.

$V\times W=\{(\vec{x},\vec{y})|\vec{x}\in V,\vec{y}\in W\}$ көптүгүн пайдаланып, $V\otimes W$ көрүнүшүндө белгиленген жаңы вектордук мейкиндикти түзөлү. Төмөндөгүдөй аныктоолорду кабыл алабыз:

Аныктоо1. $V\otimes W$ ***мейкиндигинин базиси*** деп бардык иреттелген $(\vec{a}_i,\vec{в}_t)$ түгөйлөрдүн көптүгүн атайбыз жана $\vec{f}_{it}=\vec{a}_i\otimes\vec{в}_t$ көрүнүшүндө жазабыз.

Аныктоо2. Ар бир $(\vec{x},\vec{y})\in V\otimes W$ элементине (мында $\vec{x}=x^i\vec{a}_i$, $\vec{y}=y^t\vec{в}_t$) ушул эле $V\otimes W$ көптүгүнүн $\vec{x}\otimes\vec{y}=x^iy^t\vec{f}_{it}$ элементин тиешелештикке коебуз жана бул элементти $\vec{x}$ жана $\vec{y}$ векторлорунун ***тензордук көбөйтүндүсү*** деп айтабыз.

Аныктоо3. Эгерде $\vec{p},\vec{q}\in V\otimes W$, $\alpha\in K$, $\vec{p}=p^{it}\vec{f}_{it}$, $\vec{q}=q^{it}\vec{f}_{it}$ болсо, анда $\vec{p}+\vec{q}=(p^{it}+q^{it})\vec{f}_{it}$, $\alpha\vec{p}=(\alpha p^{it})\vec{f}_{it}$ деп алабыз.

Жогорудагылардан $V\otimes W$ көптүгү K талаасынын үстүндө аныкталган $n\cdot m$ ченемдүү вектордук мейкиндик боло тургандыгы келип чыгат. Бул мейкиндикти берилген V жана W мейкиндиктеринин тензордук көбөйтүндүсү деп атайбыз. Экинчи жана үчүнчү аныктоолордон векторлордун тензордук көбөйтүндүсүнүн төмөндөгүдөй касиеттери келип чыгат:

$$\forall\vec{x},\vec{x}_1,\vec{x}_2\in V,\ \forall\vec{y},\vec{y}_1,\vec{y}_2\in W,\ \forall\alpha\in K:$$

$$\begin{aligned}&\vec{x}\otimes(\vec{y}_1+\vec{y}_2)=\vec{x}\otimes\vec{y}_1+\vec{x}\otimes\vec{y}_2\ ;\\&(\vec{x}_1+\vec{x}_2)\otimes\vec{y}=\vec{x}_1\otimes\vec{y}+\vec{x}_2\otimes\vec{y}\ ;\\&(\alpha\vec{x})\otimes\vec{y}=\vec{x}\otimes(\alpha\vec{y})=\alpha(\vec{x}\otimes\vec{y}).\end{aligned}\tag{1}$$

$V\otimes W$ векторлук мейкиндигинде бир базистен экинчи базиске өтүүнү каалагандай эле жол менен ишке ашыруу мүмкүн эмес деп шарт кылабыз да, бир базистен экинчи базиске өтүүнүн эрежесин көрсөтөбүз. Эгерде V жана W вектордук мейкиндиктеринде жаңы $\vec{a}_{i'}=a_{i'}^{i}\vec{a}_i$, $\vec{в}_{l'}=в_{l'}^{l}\vec{в}_l$ базистерин алсак, анда (1) формулалардын негизинде $\vec{a}_{i'}\otimes\vec{в}_{l'}=a_{i'}^{i}в_{l'}^{l}\vec{a}_i\otimes\vec{в}_l$ болот. $\vec{f}_{i'l'}=\vec{a}_{i'}\otimes\vec{в}_{l'}$ деп алабыз.

V жана W мейкиндиктериндеги жогоруда көрсөтүлгөндөй бир базистен экинчи базиске өтүүгө $V\otimes W$ мейкиндигинде

$$\vec{f}_{i'l'}=a_{i'}^{i}в_{l'}^{l}\vec{f}_{il}\tag{2}$$

закону боюнча аныкталган бир базистен экинчи базиске өтүүнү тиешелеш коебуз. $V\otimes W$ мейкиндигинде бир базистен экинчи базиске ушундайча гана өтүү мүмкүн деп эсептейбиз.

$\vec{x}\otimes\vec{y}$ элементи V жана W мейкиндиктеринде базисти тандап алуудан (демек, $V\otimes W$ мейкиндигинин базисин тандап алуудан) көз каранды эмес экендигин текшерүүгө болот.

$\vec{x} = x^i\vec{a}_i, \quad \vec{y} = y^t\vec{в}_t$ болсун дейли. Анда

$$\vec{x}\otimes\vec{y} = x^i y^t \vec{f}_{it}. \qquad (3)$$

V жана W мейкиндиктериндеги $(\vec{a}_i)$ жана $(\vec{в}_t)$ базистерин тиешелеш түрдө $\vec{a}_{i'} = a^i_{i'}\vec{a}_i$, $\vec{в}_{t'} = в^t_{t'}\vec{в}_t$ базистери менен алмаштыралы. $\vec{x} = x^{i'}\vec{a}_{i'}$, $\vec{y} = y^{t'}\vec{в}_{t'}$ болсун дейли. $V\otimes W$ мейкиндигинде (3) закон боюнча аныкталган $(\vec{x}\otimes\vec{y})' = x^{i'}y^{t'}\vec{f}_{i't'}$ векторун карайбыз. (2) формуланы пайдаланып төмөндөгүнү алабыз:

$$(\vec{x}\otimes\vec{y})' = \left(x^{i'}a^i_{i'}\right)\left(y^{t'}в^t_{t'}\right)\vec{f}_{it}.$$

Бирок, бир базистен экинчи базиске өткөндө вектордук координаталарынын өзгөрүү законуна ылайык төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$a^i_{i'}x^{i'} = x^i, \; в^t_{t'}y^{t'} = y^t.$$

Ошондуктан $(\vec{x}\otimes\vec{y})' = x^i y^t \vec{f}_{it} = \vec{x}\otimes\vec{y}$ келип чыгат, б.а. $\vec{x}\otimes\vec{y}$ элементи $V\otimes W$ мейкиндигинин базисин тандап алуудан көз каранды эмес экен.

V жана W вектордук мейкиндиктеринин үстүндө аныкталган ***тензор*** деп, $V\otimes W$ мейкиндигинин каалаган векторун айтабыз. Бул $T = t^{it}\vec{f}_{it}$ көрүнүшүндөгү элемент болот. Мында, $t^{it}\in K$ сандары T тензорунун $(\vec{f}_{it})$ ***базисиндеги координаталары*** деп аталышат.

$(\vec{f}_{it})$ базисинен $(\vec{f}_{i't'})$ базисине (2) закон боюнча өткөн мезгилде T тензору $t^{i't'}$ координаталарына ээ болот:

$$T = t^{i't'}\vec{f}_{i't'} = t^{i't'}a_{i'}^{i}\text{в}_{t'}^{t}\vec{f}_{it}.$$

Бирок, $T = t^{it}\vec{f}_{it}$ болгондуктан $t^{it} = a_{i'}^{i}\text{в}_{t'}^{t}t^{i't'}$ же $t^{i't'} = \tilde{a}_{i}^{i'}\tilde{\text{в}}_{t}^{t'}t^{it}$ келип чыгат. Мында $\left\|\tilde{a}_{i}^{i'}\right\| = \left\|a_{i'}^{i}\right\|^{-1}$, $\left\|\tilde{\text{в}}_{t}^{t'}\right\| = \left\|\text{в}_{t'}^{t}\right\|^{-1}$. T тензорунун жаңы $t^{i't'}$ координаталары анын эски t^{it} координаталары аркылуу ушундайча туюнтулат.

K талаасынын үстүндө берилген чектүү сандагы вектордук мейкиндиктердин тензордук көбөйтүндүсү да жогорудагыга окшош эле аныкталат.

Тензордук көбөйтүндүдөгү көбөйтүүчү мейкиндиктердин ар бири берилген V $(dim V = n)$ вектордук мейкиндиги менен же ага түйүндөш болгон V^{*} вектордук мейкиндиги менен дал келген учур геометрия үчүн маанилүү болуп эсептелет (мында мейкиндиктердин бардыгы үчүн бир эле $(\vec{e}_i)$ базиси же ага түйүндөш $\left(\underset{\to}{e}^{k}\right)$ базиси тандалып алынат).

Мисал катары $V^{*}\otimes V\otimes V^{*}$ тензордук көбөйтүндүсүн карайлы. Анын базиси $\left(\underset{\to}{e}^{i}\otimes\vec{e}_{j}\otimes\underset{\to}{e}^{k}\right)$ көрүнүшүндө болот. Бул мейкиндиктин T вектору $T = t_{i\cdot k}^{\cdot j\cdot}\underset{\to}{e}^{i}\otimes\vec{e}_{j}\otimes\underset{\to}{e}^{k}$ түрүндө жазылат жана $3 = 1 + 2$ ***валенттүү тензор*** же $(1,2)$ ***тибиндеги*** (бир жолу контраварианттуу жана эки жолу ковариантуу)

тензор деп аталат. Эгерде V вектордук мейкиндигинин $(\vec{e}_i)$ базисин $\vec{e}_{i'} = c^i_{i'}\vec{e}_i$ базиси менен алмаштырсак (бул учурда V^* мейкиндигинин $\left(\underset{\rightarrow}{e^i}\right)$ түйүндөш базиси $\underset{\rightarrow}{e^{i'}} = \tilde{c}^{i'}_i \underset{\rightarrow}{e^i}$ базисине өтөт), анда T тензорунун координаталары $t^{\cdot j' \cdot}_{i' \cdot k'} = c^i_{i'} c^{j'}_j c^k_{k'} t^{\cdot j \cdot}_{i \cdot k}$ закону боюнча өзгөрө тургандыгын жеңил эле текшерүүгө болот.

$V^* \otimes V^* \otimes V$ мейкиндигинин элементи болгон $t^{\cdot\cdot j}_{ik\cdot}$ тензорунун да $V \otimes V^* \otimes V^*$ мейкиндигинин элементи болгон $t^{j\cdot\cdot}_{\cdot ik}$ тензорунун да координаталары ушул эле закон боюнча өзгөрө тургандыгын көрүүгө болот.

Көпчүлүк маселелерде (ар дайым эле эмес) бул тензорлорду айырмалап кароонун зарылчылыгы деле болбойт: алардын контравarianttык индекстери менен ковarianttык индекстеринин саны гана маанилүү болуп эсептелет. Мындай учурларда бул тензорлорду бир эле тензор катары эсептеп, анын координаталарын t^j_{ik} көрүнүшүндө жазууну шарт кылабыз.

a_i координаталарына ээ болгон $(0,1)$ тибиндеги тензор V^* мейкиндигинин $\underset{\rightarrow}{a} = a_i \underset{\rightarrow}{e^i}$ ковектору, ал эми a^i координаталарына ээ болгон $(1,0)$ тибиндеги тензор V мейкиндигинин $\vec{a} = a^i \vec{e}_i$ вектору болот.

Тензорлордун үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдарды карайлы.

1. Кошуу. A жана B - бирдей эле (p,q) тибиндеги тензорлор болушсун. Булар p сандагы V жана q сандагы V^* вектордук мейкиндиктеринин тензордук көбөйтүндүсүнүн векторлору болушат. Бул мейкиндикти

$$\left(\overset{p}{\otimes}V\right)\otimes\left(\overset{q}{\otimes}V^*\right)$$

көрүнүшүндө белгилеп коелу.

A жана B векторлорун кошууга болот: $C=A+B$ векторуна ээ болобуз. Векторлорду кошуунун белгилүү эрежесине ылайык C тензорунун координаталары берилген A жана B тензорлорунун тиешелеш координаталарынын суммасына барабар болушат.

2. Көбөйтүү. (p,q) тибиндеги A тензору жана (r,s) тибиндеги T тензору берилген болсун. Демек,

$$A\in\left(\overset{p}{\otimes}V\right)\otimes\left(\overset{q}{\otimes}V^*\right), T\in\left(\overset{r}{\otimes}V\right)\otimes\left(\overset{s}{\otimes}V^*\right): a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} -$$

A тензорунун, $t^{k_1\dots k_r}_{\ell_1\dots\ell_s}$ – T тензорунун координаталары болсун. K талаасынын $U^{i_1\dots i_p k_1\dots k_r}_{j_1\dots j_q \ell_1\dots\ell_s}=a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\ t^{k_1\dots k_r}_{\ell_1\dots\ell_s}$ элементтери кандайдыр бир $U\in\left(\overset{p+r}{\otimes}V\right)\otimes\left(\overset{q+s}{\otimes}V^*\right)$ векторунун координаталары болуп эсептелет. Бул U вектору берилген A жана T векторлорунун тензордук көбөйтүндүсү болуп эсептелет жана ал $(p+r,\ q+s)$ тибиндеги тензор болот. Демек, A жана T тензорлорун көбөйтүү үчүн A

тензорунун ар бир координатасын T тензорунун ар бир координатасына көбөйтүү керек. Натыйжада $U = A \otimes T$ тензорун алабыз. Ушуга эле окшош $W = T \otimes A$ тензорун алууга болот. U жана W тензорлору бир эле $\left(\overset{p+r}{\otimes} V\right) \otimes \left(\overset{q+s}{\otimes} V^*\right)$ вектордук мейкиндигинин векторлору болушат. Жалпы учурда бул векторлордун тиешелеш координаталары ар түрдүүчө болгондуктан, $A \otimes T \neq T \otimes A$ (демек, $\vec{x} \otimes \vec{y} \neq \vec{y} \otimes \vec{x}$).

Демек, тензорлорду көбөйтүү коммутативдүүлүк законго баш ийбейт. Бирок, бул амал ассоциативдүүлүк жана дистрибутивдүүлүк закондоруна баш ийе тургандыгын жеңил эле текшерүүгө болот:

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C),\ A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C,$$

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C.$$

3. **Түрүү.** (p,q) $(p \neq 0,\ q \neq 0)$ тибиндеги $A \in \left(\overset{p}{\otimes} V\right) \otimes \left(\overset{q}{\otimes} V^*\right)$ тензорун алалы. Бул тензордун бардык $a^{i_1 \dots i_t \dots i_p}_{j_1 \dots j_s \dots j_q}$ координаталарынын ичинен $i_t = j_s$ болгон координаталарын тандап алабыз. K талаасынын төмөндөгүдөй элементтери

$$a^{i_1 \dots i_{t-1} i_{t+1} \dots i_p}_{j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_q} = a^{i_1 \dots i_{t-1} k i_{t+1} \dots i_p}_{j_1 \dots j_{s-1} k j_{s+1} \dots j_q}$$

(k боюнча 1 ден n ге чейин суммалоо жүргүзүлөт) $(p-1,\ q-1)$ тибиндеги $A_l \in \left(\overset{p-1}{\otimes} V\right) \otimes \left(\overset{q-1}{\otimes} V^*\right)$ тензорунун координаталары болушат. A_l тензору A тензорун i_l жана j_s индекстери боюнча түрүүдөн алынды деп айтышат.

Мисал. $(1,2)$ тибиндеги A тензору a^i_{jk} координаталары менен берилген болсун. Бул тензорду i жана k индекстери боюнча түрүү менен $a_j = a^k_{jk}$ координаталарына ээ болгон A_l тензорун алабыз. A_l чындыгында эле тензор боло тургандыгын текшерели, б.а. бир базистен экинчи базиске өткөндө K талаасынын a_j элементтери тензордук закон боюнча өзгөрө тургандыгын көрсөтөлү.

Бир базистен экинчи базиске өткөндө $a^{i'}_{j'k'} = \tilde{c}^{i'}_i c^j_{j'} c^k_{k'} a^i_{jk}$ болгондуктан, $a_{j'} = a^{k'}_{j'k'} = c^k_{k'} c^j_{j'} \tilde{c}^{k'}_i a^i_{jk} = c^j_{j'} \delta^k_i a^i_{jk} = c^j_{j'} a^k_{jk}$, б.а. $a_{j'} = c^j_{j'} a_j$ болот. Демек, A_l тензор болот экен.

Эгерде $p = q$ болсо, анда түрүү амалын дагы улантууга (бардык индекстер жок болгонго чейин) болот. Бул учурда нөлдүк валенттүүлүккө ээ болгон тензорду, б.а. инвариантты $-V$ вектордук мейкиндигинде базисти тандап алуудан көз каранды болбогон, K талаасынын кандайдыр бир элементин алабыз. Ошондуктан, түрүү амалы инварианттарды алуунун булагы болуп эсептелет.

Айрым учурду карайлы. $A-(1,1)$ тибиндеги тензор болсун жана $A=\vec{a}\otimes \underset{\rightarrow}{в}$ деп алалы. A тензорунун координаталары a^ib_j көрүнүшүндө болот. A тензорун i жана j индекстери боюнча түрөбүз да, $<\vec{a},\underset{\rightarrow}{в}>=a^kв_k$ инвариантына ээ болобуз. Бул инвариант төмөндөгүдөй жөнөкөй геометриялык мааниге ээ болот.

V вектордук мейкиндиги K талаасынын үстүндө берилген $n-$ ченемдүү A_n аффиндик мейкиндигинин котоурууларынын мейкиндиги болуп кызмат кылат. $0\in A_n$ чекитин бекемдеп коелу. A_n мейкиндигин V мейкиндиги менен дал келтирүүгө боло тургандыгын билебиз [2]. V мейкиндигинин кандайдыр бир $B=(\vec{e}_i)$ базисин алып, A_n мейкиндигинде $\Re=(0,\vec{e}_i)$ реперине ээ болобуз.

$\underset{\rightarrow}{в}\in V^*$ ковекторуна A_n мейкиндигинин $П: в_ix^i+1=0$ гипертегиздигин тиешелештикке коюуга болот $(0\notin П)$.

Эгерде V мейкиндигинде базисти алмаштырсак, анда A_n мейкиндигинде жаңы $\Re'=(0,\vec{e}_{i'})$ реперине ээ болобуз. Бул реперге карата башка

$$в_{i'}x^{i'}+1=0 \tag{4}$$

теңдемеге ээ болобуз. (4) теңдеме эски $\Re$ реперинде $c^i_{i'}в_i c^{i'}_k x^k+1=0$, б.а. $\delta^i_k в_i x^k+1=0$ же $в_ix^i+1=0$ көрүнүшүндө болот. Демек, (4) теңдеме ошол эле $П$

гипертегиздигин аныктайт экен. $\vec{a}$ багыттоочу векторуна ээ болгон $(0,\vec{a})$ түз сызыгынын параметрдик теңдемелери $x^i = a^i t$ көрүнүшүндө болот. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ болгондуктан, A чекити $A(a^1, a^2, ..., a^n)$ координаталарына ээ болот. $\vec{a}$ вектору Π гипертегиздигине параллель эмес деп алалы, демек, $a^i в_i \neq 0$. $X = (0,\vec{a}) \cap \Pi$ чекитин табабыз. Ал үчүн Π гипертегиздигинин теңдемесине $x^i = a^i t$ барабардыгын ордуна коелу: $в_i(a^i t) + 1 = 0$. Мындан, $t = -\frac{1}{a^i в_i}$ жана X чекитинин координаталары $x^i = -\frac{1}{a^i в_j} a^i$ экендиги келип чыгат. Ошондуктан, $\overrightarrow{OX} = -\frac{1}{a^i в_i} \overrightarrow{OA}$, демек, $\overrightarrow{OA} = a^i в_i \overrightarrow{OX}$. Мындан A, X, O чекиттеринин жөнөкөй катышы $(AX, 0) = a^i в_i$ экендигин көрөбүз. Демек,

а) $< \vec{a}, \underset{\rightarrow}{в} > = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \,//\, \Pi$.

б) Эгерде $< \vec{a}, \underset{\rightarrow}{в} > \neq 0$ болсо, анда $< \vec{a}, \underset{\rightarrow}{в} > = (AX, O)$.

4. Симметриялаштыруу. $a^{ij}_{k\ell m}$ координаталарына ээ болгон кандайдыр бир A тензорун алалы. Бул координаталардын жардамы менен $в^{ij}_{k\ell m} = a^{ij}_{\ell km}$ координаталарына ээ боло тургандай башка бир B тензорун аныктоого болот. *B* тензору *A* тензорунан анын k жана ℓ индекстеринин орундарын алмаштыруудан алынды деп айтышат. Мындай (подстановкада) орун алмаштырууда *A* тензорунун каалаганчалык сандагы бир аттуу (жалаң гана жогорку же жалаң гана төмөнкү) индекстери катышышы мүмкүн.

(p,q) тибиндеги *A* тензорун симметриялаштыруу амалы төмөндөгүдөй аткарылат. *A* тензорунун кандайдыр бир s сандагы бир аттуу индекстерин алабыз да, бул индекстердин үстүнөн мүмкүн болгон $s!$ сандагы орун алмаштырууларды жүргүзөбүз жана пайда болгон $s!$ сандагы тензорлордун арифметикалык орточосун алабыз. Мисалы, a_{ijk} координаталарына ээ болгон *A* тензорунун жардамы менен биз төмөндөгүдөй жаңы тензорлорду:

$a_{(ij)k} = \frac{1}{2}\left(a_{ijk} + a_{jik}\right)$ координаталарына ээ болгон A_1 тензорун, $a_{(i|j|k)} = \frac{1}{2}\left(a_{ijk} + a_{kji}\right)$ координаталарына ээ болгон A_2 тензорун (симметриялоого катышпаган ортоңку индексти вертикалдык сызыктарга алып коюшат),

$$a_{(ijk)} = \frac{1}{3!}\left(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} + a_{jik} + a_{ikj} + a_{kji}\right)$$

координаталарына ээ болгон A_3 тензорун алууга болот.

Эгерде кандайдыр бир индекстери боюнча симметриялаштыруудан тензор өзгөрбөсө, анда аны ушул индекстери боюнча ***симметриялуу тензор*** деп аташат.

Мисалы, эгерде a_{ij} тензору симметриялуу болсо, анда $a_{(ij)} = a_{ij}$, б.а. $\frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right) = a_{ij}$. Акыркы барабардык $a_{ij} = a_{ji}$ болгондо гана орун алат.

Берилген тензорду кандайдыр бир индекстери боюнча симметриялаштыруудан ушул индекстери боюнча симметриялуу болгон тензор пайда боло тургандыгы түшүнүктүү. Мисалы,

$$a_{(ijk)} = \frac{1}{2}\left(a_{ijk} + a_{jik}\right), \quad a_{(ji)k} = \frac{1}{2}\left(a_{jik} + a_{ijk}\right).$$

Демек, $a_{(ij)k} = a_{(ji)k}$.

5. **Альтернативдештирүү.** Жогоруда (4 пункт) пайда болгон $s!$ сандагы тензорлордун суммасын $s!$ га бөлөбүз да, эгерде алынган индекстер боюнча жүргүзүлгөн орун алмаштыруулардын саны жуп болсо, анда ал кошулуучунун алдындагы белгини "+" деп алабыз, ал эми орун алмаштыруулардын саны так болсо, анда ал кошулуучунун алдындагы белги "–" деп алынат. Мисалы, $a_{[ij]k} = \frac{1}{2}\left(a_{ijk} - a_{jik}\right)$ (чарчы кашаалар – алардын ичиндеги индекстер боюнча альтернативдештирүү жүргүзүлө тургандыгын көрсөтөт). Эгерде тензор кандайдыр бир индекстери боюнча симметриялуу болсо, анда ушул индекстер боюнча альтернативдештирүүдөн нөлдүк тензор келип чыгат. Мисалы, эгерде $a_{ij} = a_{ji}$ болсо, анда $a_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} - a_{ji}\right) = 0$.

Эгерде тензор кандайдыр бир индекстери боюнча альтернативдештирүүдөн өзгөрбөсө, анда ал тензорду ушул индекстери боюнча антисимметриялуу тензор деп аташат. Мисалы, эгерде $a_{[ij]} = a_{ij}$, б.а. $\frac{1}{2}\left(a_{ij} - a_{ji}\right) = a_{ij}$ болсо, анда $a_{ij} = -a_{ji}$. Тензордун кандайдыр бир индекстери боюнча симметриялуу же антисимметриялуу болуу касиети базисти тандап алуудан көз каранды эмес экендигин жеңил эле текшерүүгө болот. Демек, бул касиет тензордун өзүнүн касиети болуп эсептелет.

Эгерде тензор кандайдыр бир индекстери боюнча антисимметриялуу болсо, анда ушул индекстери боюнча симметриялаштыруудан нөлдүк тензор келип чыгат. Мисалы, эгерде $a_{ij} = -a_{ji}$ болсо, анда $a_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right) = 0$.

Бардык индекстери боюнча антисимметриялуу болгон $(p,0)$ же $(0,q)$ тибиндеги тензорду ***поливектор*** деп аташат. $(1,1)$ тибиндеги тензор аффинор деп аталат. a^i_j - V мейкиндигинин кандайдыр бир $(\vec{e}_i)$ базисиндеги аффинордун координаталары болсун. Ар бир $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ векторуна аффинор $\vec{y} = y^i \vec{e}_i$ (мында $y^i = a^i_j x^j$) векторун тиешелештикке коет.

Ошентип, ар кандай аффинор V вектордук мейкиндигинде кандайдыр бир сызыктуу операторду аныктайт. Тескерисинче ырастоо да туура болот: V

мейкиндигиндеги ар кандай сызыктуу оператор кандайдыр бир аффинордун жардамы менен ишке ашат. Аффинордун геометриялык мааниси ушунда.

§ 9. Тензордук катмарланыш. Тензордук талаалар

X_n – C^k – көптүспөлдүүлүк (жөнөкөйлүк үчүн $k=\infty$ деп алууга болот) жана $x \in X_n$ болсун. Төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү киргизели:

$$T^p_{q,x} = \left(\overset{p}{\otimes} T_x \right) \otimes \left(\overset{q}{\otimes} T^* \right), T^p_q(X_n) = \bigcup_{x \in X_n} T^p_{q,x}.$$

$T^p_q(X_n)$ көптүгүндө $n + n^{p+q}$ ченемдүү C^k - көптүспөлдүүлүктүн структурасын аныктоого болот. $\pi : T^p_q(X_n) \to X_n$ табигый проекциялоо төмөндөгүдөй аныкталат: эгерде $X \in T^p_{q,x}$ болсо, анда $\pi(X) = x$ болот.

V – чыныгы сандардын талаасынын үстүндө аныкталган n – ченемдүү вектордук мейкиндик жана $\Gamma^p_q = \left(\overset{p}{\otimes} V \right) \otimes \left(\overset{q}{\otimes} V^* \right)$ болсун. $\left(T^p_q(X_n),\ X_n,\ \Gamma^p_q, \pi \right)$ төрттүгү катмарланган мейкиндик боло тургандыгын көрсөтүүгө болот (жаныма катмарланыш үчүн жүргүзүлгөн далилдөөгө окшош эле далилденет). Бул катмарланган мейкиндикти (p,q) тибиндеги ***тензордук катмарланыш*** деп аташат. $p = 1,\ q = 0$ болгондо $T(X_n)$ – жаныма катмарланышка, ал эми $p=0,\ q=1$ болгондо $T^*(X_n)$ – ковариантуык жаныма катмарланышка ээ болобуз.

X_n – C^k– көптүспөлдүүлүгүндө аныкталган (p,q) тибиндеги жана C^k классына таандык тензордук талаа деп $T_q^p(X_n)$ тензордук катмарланышынын C^k– кесилишин аташат. Эгерде $T-(p,q)$ тибиндеги тензордук талаа болсо, анда $T_{|x}\in\pi^{-1}(x)=T_{q,x}^p$. Эгерде $\varphi - x\in X_n$ чекитинин чекебелиндеги карта болсо, анда T_x мейкиндигинин (∂_i) базисине карата $T_{|x}$ тензору $t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}$ координаталарына ээ болот. Бул координаталар x чекитинде чыныгы сандар болушат. Эгерде T тензордук талаасын алсак, анда $t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}$ координаталары чыныгы функциялар болушат. T тензордук талаасы C^k классына таандык болушу үчүн ушул функциялардын C^k классына таандык болушу зарыл жана жетиштүү. T тензордук талаасы X_n көптүспөлдүүлүгүнүн бардыгында эмес, кандайдыр бир ачык G камтылуучу көптүгүндө гана аныкталган болушу да мүмкүн. «T тензордук талаасы» дегендин ордуна «T тензорунун талаасы» деп да айтышат.

§ 10. Сырткы элементтер. Сырткы алгебра

V – K талаасынын үстүндө аныкталган вектордук мейкиндик болсун жана $dim V=n$.

$\underset{\to}{x}, \underset{\to}{y} \in V^*$ ковекторлорунун ***сырткы көбөйтүндүсү*** деп төмөндөгүдөй антисимметриялуу тензорду айтабыз: $\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y} = \underset{\to}{x} \otimes \underset{\to}{y} - \underset{\to}{y} \otimes \underset{\to}{x}$. Демек, $\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y} \in V^* \otimes V^*$.

Эгерде $\left(\underset{\to}{e^i}\right)_{1 \le i \le n}$ – V^* мейкиндигинин базиси болсо, анда $\underset{\to}{e^i} \wedge \underset{\to}{e^j} = \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} - \underset{\to}{e^j} \otimes \underset{\to}{e^i}$ болот.

$\underset{\to}{x} = x_i \underset{\to}{e^i}$, $\underset{\to}{y} = y_j \underset{\to}{e^j}$ болсун.

Анда $\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y} = x_i y_j \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} - y_j x_i \underset{\to}{e^j} \otimes \underset{\to}{e^i} =$

$$= x_i y_j \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} - x_j y_i \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} = \left(x_i y_j - x_j y_i\right) \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j}\ .$$

Бирок, $\left(\underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j}\right)$ – $V^* \otimes V^*$ вектордук мейкиндигинин базиси болгондуктан, $\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y}$ сырткы көбөйтүндүсү ($V^* \otimes V^*$ вектордук мейкиндигинин элементи катарында) бул базиске карата $t_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ координаталарына ээ болот: $\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y} = t_{ij} \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j}$

$$\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y} = \frac{1}{2}\left(t_{ij} \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} + t_{ij} \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j}\right) = \frac{1}{2}\left(t_{ij} \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} + t_{ji} \underset{\to}{e^j} \otimes \underset{\to}{e^i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t_{ij} \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} - t_{ij} \underset{\to}{e^j} \otimes \underset{\to}{e^i}\right) = \frac{1}{2} t_{ij}\left(\underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} - \underset{\to}{e^j} \otimes \underset{\to}{e^i}\right) = \frac{1}{2} t_{ij} \underset{\to}{e^i} \wedge \underset{\to}{e^j}\ .$$

Ошентип, V^* мейкиндигиндеги базистик векторлордун сырткы көбөйтүндүсүн колдонсок, анда төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\underset{\to}{x}\wedge\underset{\to}{y}=\frac{1}{2}t_{ij}\,\underset{\to}{e^{i}}\wedge\underset{\to}{e^{j}}\,, \tag{1}$$

мында $t_{ij}=x_iy_j-y_ix_j=\begin{vmatrix}x_i & x_j\\ y_i & y_j\end{vmatrix}$.

1, 2, ..., n сандарынын ичинен кандайдыр бир эки ар түрдүү i_o, j_o сандарын алалы: $i_o<j_o$ болсун. (1) суммада $\frac{1}{2}t_{i_oj_o}\,\underset{\to}{e^{i_o}}\wedge\underset{\to}{e^{j_o}}$ жана $\frac{1}{2}t_{j_oi_o}\,\underset{\to}{e^{j_o}}\wedge\underset{\to}{e^{i_o}}$ көрүнүшүндөгү мүчөлөр бар. Алардын суммасы төмөндөгүнү берет.

$$\frac{1}{2}t_{i_oj_o}\,\underset{\to}{e^{i_o}}\wedge\underset{\to}{e^{j_o}}+\frac{1}{2}\left(-t_{i_oj_o}\right)\left(-1\right)\underset{\to}{e^{i_o}}\wedge\underset{\to}{e^{j_o}}=t_{i_oj_o}\,\underset{\to}{e^{i_o}}\wedge\underset{\to}{e^{j_o}}\,,$$

мында $i_o<j_o$. Ошондуктан (1) формуланы төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$\underset{\to}{x}\wedge\underset{\to}{y}=\sum_{i<j}t_{ij}\,\underset{\to}{e^{i}}\wedge\underset{\to}{e^{j}}\ . \tag{2}$$

V^* мейкиндигинен алынган P сандагы $\underset{\to}{x^1},\underset{\to}{x^2},\dots,\underset{\to}{x^p}$ ковекторлордун сырткы көбөйтүндүсү төмөндөгүдөй аныкталат:

$$\underset{\to}{x^1}\wedge\underset{\to}{x^2}\wedge\dots\wedge\underset{\to}{x^p}=\sum\left(-1\right)^{\left[\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p\right]}\underset{\to}{x^{\alpha_1}}\otimes\underset{\to}{x^{\alpha_2}}\otimes\dots\otimes\underset{\to}{x^{\alpha_p}}\,,$$

мында $(\alpha_1\alpha_2...\alpha_p)$– $1, 2, ..., p$ индекстери боюнча жүргүзүлгөн орун алмаштыруу, ал эми $[\alpha_1\alpha_2...\alpha_p]$–ушул орун алмаштыруудагы иретсиздиктердин саны.

Ошентип, $\underset{\rightarrow}{x}^1\wedge \underset{\rightarrow}{x}^2\wedge ...\wedge \underset{\rightarrow}{x}^p$–антисимметриялуу, p валенттүү коварианттык тензор (кыскача, коварианттык p-вектор) болот. жана ал $\overset{p}{\otimes}V^*$ тензордук көбөйтүндүсүнүн анык бир элементи.

Эгерде V^* мейкиндигинин $\left(\underset{\rightarrow}{e}^i\right)$ базисин алсак жана $\underset{\rightarrow}{x}^\alpha = x_i^\alpha \underset{\rightarrow}{e}^i \quad (\alpha = 1, 2, ..., p;\ i = 1, 2, ..., n)$ болсо, анда

$$\underset{\rightarrow}{x}^1\wedge \underset{\rightarrow}{x}^2\wedge ...\wedge \underset{\rightarrow}{x}^p = \sum(-1)^{[\alpha_1\alpha_2...\alpha_p]} x_{i_1i_2...i_p}^{\alpha_1\alpha_2...\alpha_p} \underset{\rightarrow}{e}^{i_1}\otimes \underset{\rightarrow}{e}^{i_2}\otimes ...\otimes \underset{\rightarrow}{e}^{i_p}.$$

Берилген $\underset{\rightarrow}{x}^1, \underset{\rightarrow}{x}^2 ..., \underset{\rightarrow}{x}^p$ ковекторлордун $i_1, i_2, ..., i_p$ номерлүү координаталарынан түзүлгөн аныктагычты төмөндөгүдөй белгилеп коелу:

$$t_{i_1i_2...i_p} = \begin{vmatrix} x_{i_1}^1 & x_{i_2}^1 ... & x_{i_p}^1 \\ x_{i_1}^p & x_{i_2}^p ... & x_{i_p}^p \end{vmatrix}.$$

Анда $\underset{\rightarrow}{x}^1\wedge \underset{\rightarrow}{x}^2\wedge ...\wedge \underset{\rightarrow}{x}^p = t_{i_1i_2...i_p} \underset{\rightarrow}{e}^{i_1}\otimes \underset{\rightarrow}{e}^{i_2}\otimes ...\otimes \underset{\rightarrow}{e}^{i_p}$.

Демек, $t_{i_1 i_2 \dots i_p}$ – $\overset{p}{\otimes} V^*$ мейкиндигинен алынган $\underset{\to}{x^1} \wedge \dots \wedge \underset{\to}{x^p}$ векторунун ушул вектордук мейкиндиктин $\left(\underset{\to}{e^{i_1}} \otimes \dots \otimes \underset{\to}{e^{i_p}}\right)$ базисиндеги координаталары болуп эсептелет.

V^* мейкиндигинин $\left(\underset{\to}{e^{i}}\right)$ базисинин векторлорунун сырткы көбөйтүндүсүн аныктайбыз:

$$\underset{\to}{e^{i_1}} \wedge \underset{\to}{e^{i_2}} \wedge \dots \wedge \underset{\to}{e^{i_p}} = \sum (-1)^{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p]} \underset{\to}{e^{i_{\alpha_1}}} \otimes \underset{\to}{e^{i_{\alpha_2}}} \dots \otimes \underset{\to}{e^{i_{\alpha_p}}}$$

Анда (1) жана (2) формулаларга окшош эле төмөндөгү формулаларга ээ болобуз:

$$\underset{\to}{x^1} \wedge \underset{\to}{x^2} \wedge \dots \wedge \underset{\to}{x^p} = \frac{1}{p!} t_{i_1 t_2 \dots i_p} \underset{\to}{e^{i_1}} \wedge \underset{\to}{e^{i_2}} \wedge \dots \wedge \underset{\to}{e^{i_p}}, \qquad (3)$$

$$\underset{\to}{x^1} \wedge \underset{\to}{x^2} \wedge \dots \wedge \underset{\to}{x^p} = \sum_{i_1 < \dots < i_p} t_{i_1 t_2 \dots i_p} \underset{\to}{e^{i_1}} \wedge \underset{\to}{e^{i_2}} \wedge \dots \wedge \underset{\to}{e^{i_p}}. \qquad (4)$$

Ар кандай ковarianттуу, антисимметриялуу, p валенттүү A тензорун, б.а. $A = a_{i_1 \dots i_p} \underset{\to}{e^{i_1}} \otimes \dots \otimes \underset{\to}{e^{i_p}}$ тензорун

$A = \frac{1}{p!} a_{i_1 i_2 \dots i_p} \underset{\to}{e^{i_1}} \wedge \underset{\to}{e^{i_2}} \wedge \dots \wedge \underset{\to}{e^{i_p}}$ көрүнүшүндө, же

$$A = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p} \underset{\to}{e^{i_1}} \wedge \dots \wedge \underset{\to}{e^{i_p}} \qquad (5)$$

көрүнүшүндө жазууга болот.

Ар кандай A сыяктуу тензор (б.а. коварианттуу $p-$вектор) өзүнүн C_n^p сандагы координаталарынын маанилери менен аныктала тургандыгын белгилейбиз (мында координаталардын $i_1, i_2,...,i_p$ индекстери $i_1 < i_2 < ... < i_p$ шартын канааттандырат). Ушул координаталары A тензорунун негизги координаталары деп аталышат, ал эми калган координаталары негизги координаталар аркылуу туюнтулушат же нөлгө барабар болушат.

$\underset{\rightarrow}{x}^1 \wedge ... \wedge \underset{\rightarrow}{x}^p$ көрүнүшүндөгү (мында $\underset{\rightarrow}{x}^\alpha \in V^*$) коварианттуу $p-$ вектор ***ажыралуучу*** деп аталат. (5) формуладан ар кандай A коварианттуу $p-$ вектору ажыралуучу $p-$ векторлордун суммасы боло тургандыгы келип чыгат.

Жогорудагылардан сырткы көбөйтүндү төмөндөгүдөй касиеттерге ээ боло тургандыгын көрөбүз:

1^0. $\underset{\rightarrow}{x} \wedge \underset{\rightarrow}{y} = -\underset{\rightarrow}{y} \wedge \underset{\rightarrow}{x}$ (антикоммутативдүүлүк).

Мындан $\underset{\rightarrow}{x} \wedge \underset{\rightarrow}{x} = 0$ экендиги келип чыгат.

$$2^0.\ \underset{\rightarrow}{x} \wedge \left(\underset{\rightarrow}{y} + \underset{\rightarrow}{z}\right) = \underset{\rightarrow}{x} \wedge \underset{\rightarrow}{y} + \underset{\rightarrow}{x} \wedge \underset{\rightarrow}{z},$$

$$\left(\underset{\rightarrow}{x} + \underset{\rightarrow}{y}\right) \wedge \underset{\rightarrow}{z} = \underset{\rightarrow}{x} \wedge \underset{\rightarrow}{z} + \underset{\rightarrow}{y} \wedge \underset{\rightarrow}{z} \text{ (дистрибутивдүүлүк)}$$

$$3^0.\ \left(\alpha \underset{\rightarrow}{x}\right) \wedge \underset{\rightarrow}{y} = \underset{\rightarrow}{x} \wedge \left(\alpha \underset{\rightarrow}{y}\right) = \alpha\left(\underset{\rightarrow}{x} \wedge \underset{\rightarrow}{y}\right),\ \alpha \in K.$$

4⁰. $\underset{\rightarrow}{x}^{1}\wedge \underset{\rightarrow}{x}^{2}\wedge\ldots\wedge \underset{\rightarrow}{x}^{p}=0 \Leftrightarrow (\underset{\rightarrow}{x}^{1},\underset{\rightarrow}{x}^{2},\ldots,\underset{\rightarrow}{x}^{p}-$сызыктуу көз каранды).

Чындыгында эле, $\underset{\rightarrow}{x}^{1}\wedge \underset{\rightarrow}{x}^{2}\wedge\ldots\wedge \underset{\rightarrow}{x}^{p}=0$ ($\overset{p}{\otimes}V^{*}$ мейкиндигинин нөл вектору) болот, качан гана анын бардык $t_{i_1\ldots i_p}$ координаталары, б.а. $\underset{\rightarrow}{x}^{1},\underset{\rightarrow}{x}^{2},\ldots,\underset{\rightarrow}{x}^{p}-$ковекторлорунун координа-таларынан түзүлгөн $\left\|x_i^{\alpha}\right\|$ матрицасынын $p-$ тартиптеги бардык минорлору нөлгө барабар болушса. Бул болсо $\underset{\rightarrow}{x}^{1},\ldots,\underset{\rightarrow}{x}^{p}$ ковекторлору сызыктуу көз каранды экендигин билдирет.

$\overset{p}{\wedge}V^{*}$ аркылуу бардык коварианттуу $p-$ векторлордун көптүгүн белгилейбиз. $\overset{p}{\wedge}V^{*}\subset\overset{p}{\otimes}V^{*}$ экендиги жогору жактан түшүнүктүү. Эгерде $A,B\in\overset{p}{\wedge}V^{*}$ болсо, анда $A+B-$ p валенттүү, антисимметриялуу коварианттуу тензор болот. Демек, $A+B\in\overset{p}{\wedge}V^{*}$. Ошондой эле $\left(A\in\overset{p}{\wedge}V^{*},\ \alpha\in K\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha A\in\overset{p}{\wedge}V^{*}$. Ошентип, $\overset{p}{\otimes}V^{*}$ вектордук мейкиндигинин $\overset{p}{\wedge}V^{*}$ камтылуучу көптүгү бул мейкиндикке камтылуучу мейкиндик болот экен.

$\overset{p}{\wedge} V^*$ вектордук мейкиндиги V^* вектордук мейкиндигинин $p-$ ***сырткы даражасы*** деп аталат. Ал эми анын элементтери $p-$ ***даражалуу сырткы элементтер*** деп аталышат.

$\overset{p}{\wedge} V^*$ мейкиндигинин базиси $\underset{\to}{e}^{i_1} \wedge \underset{\to}{e}^{i_2} \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{e}^{i_p}$ көрүнүшүндөгү сырткы көбөйтүндүлөрдөн түзүлөт. (Мындагы $i_1,\ldots,i_p$ индекстери $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ шартын канааттандыруу менен 1 ден n ге чейинки маанилерди кабыл алышат). Мындан $dim \overset{p}{\wedge} V^* = C_n^p$ (n элементтен p дан топтоштуруулардын саны) экендигин көрөбүз.

$A \in \overset{p}{\wedge} V^*, B \in \overset{q}{\wedge} V^*$, б.а. A- $p-$ вектор, $B-$ $q-$ вектор, $p+q \le n = dim V^*$ болсун:

$$A = \frac{1}{p!} a_{i_1 \ldots i_p} \underset{\to}{e}^{i_1} \wedge \underset{\to}{e}^{i_2} \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{e}^{i_p},$$

$$B = \frac{1}{q!} в_{j_1 \ldots j_q} \underset{\to}{e}^{j_1} \wedge \underset{\to}{e}^{j_2} \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{e}^{j_q}.$$

A жана B поливекторлорунун ***сырткы көбөйтүндүсү*** деп төмөндөгүдөй $(p+q)-$векторду айтабыз:

$$A \wedge B = \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} a_{i_1 \ldots i_p} в_{j_1 \ldots j_q} \underset{\to}{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{e}^{i_p} \wedge \underset{\to}{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{e}^{j_q} \in \overset{p+q}{\wedge} V^*.$$

Эгерде $\alpha \wedge B = \alpha B$ жана $A \wedge \alpha = \alpha A$ (мында $\alpha \in K$) деп шарт кылсак, анда бул аныктоо $p = 0$ же $q = 0$ болгон учурлар үчүн да орун алат. $p = 1$, $q = 1$ болгон учурда

$\underset{\to}{x} = x_i \underset{\to}{e}^i$ жана $\underset{\to}{y} = y_j \underset{\to}{e}^j$ ковекторлорунун сырткы көбөйтүндүсү биз жогоруда карап өткөн $\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y}$ бивектору болот. $A \wedge B$ көбөйтүндүсүнүн аныктоосунан төмөндөгүдөй натыйжаларды алууга болот:

1. $(\alpha A) \wedge B = A \wedge (\alpha B) = \alpha (A \wedge B)$- скалярдык көбөйтүүчүнү сырткы көбөйтүндүнүн белгисинин сыртына чыгарууга болот.

2. $\left.\begin{array}{l} A \wedge (B_1 + B_2) = A \wedge B_1 + A \wedge B_2 \\ (A_1 + A_2) \wedge B = A_1 \wedge B + A_2 \wedge B \end{array}\right\}$ (дистрибутивдүүлүк).

3. Эгерде $A -$ $p -$ вектор, $B -$ $q -$ вектор болсо, анда $A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A$.

4. Ар кандай $A -$ $p -$ вектору, $B -$ $q -$ вектору жана $C -$ $r -$вектору үчүн $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ (ассоциативдүүлүк) орун алат. Ошондуктан, кашааларды таштап жиберип, жөн эле $A \wedge B \wedge C$ көрүнүшүндө жазууга болот.

Бардык $p \geq 0$ үчүн $\overset{p}{\wedge} V^*$ вектордук мейкиндиктеринин түз суммасын $\wedge V^*$ көрүнүшүндө белгилейли (мында $p \leq n$, себеби $p > n$ болгондо ар кандай $p -$ вектор нөлгө айланат, ал эми тиешелүү вектордук мейкиндик бир гана нөл вектордон турат). Ошентип, $\wedge V^*$ - $n + 1$ даана төмөндөгүдөй вектордук мейкиндиктердин түз суммасы болот:

$\overset{0}{\wedge}V^* = K,\ \overset{1}{\wedge}V^*, \dots, \overset{n}{\wedge}V^*,\ n = \dim V^*$. Ар бир $z \in \wedge V^*$ элементин $z = \sum\limits_{p=0}^{n} z_p$ (мында $z_p \in \overset{p}{\wedge}V^*$) көрүнүшүндө бир маанилүү туюнтабыз.

$\wedge V^*$ көптүгү $\overset{p}{\wedge}V^*$ $(p = 0, 1, \dots, n)$ вектордук мейкиндиктери-нин түз суммасы болгондуктан,

$$\dim\left(\wedge V^*\right) = \sum_{p=0}^{n} \dim\left(\overset{p}{\wedge}V^*\right) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n .$$

(биномиалдык коэффициенттердин суммасы сыяктуу). Каалагандай эки $z = \sum\limits_{p=0}^{n} z_p,\ \ z' = \sum\limits_{q=0}^{n} z'_q \in \wedge V^*$ элементи үчүн $z \wedge z' = \sum\limits_{p,q} \left(z_p \wedge z'_q\right)$ деп алабыз, б.а. $\wedge V^*$ вектордук мейкиндигинде көбөйтүүнү ушундайча аныктадык. Эми $\wedge V^*$ көптүгү K нын үстүндө берилген алгебра боло тургандыгын текшерүүгө болот. Бул алгебраны V^* вектордук мейкиндигинин ***сырткы алгебрасы*** (же ***Грассмандын алгебрасы***) деп аташат. V^* мейкиндигинин ар бир элементи болуп V вектордук мейкиндигинде алынган сызыктуу форма эсептелет. Ал эми $\overset{p}{\wedge}V^*$ вектордук мейкиндигинин ар бир элементи (б.а. ар бир ковarianттык $p-$ вектор, же $p-$ даражадагы ар бир сырткы элемент) V вектордук мейкиндигинде аныкталган $p-$ ***даражадагы сырткы форма*** деп аталат.

V^* мейкиндигинен сызыктуу көз каранды эмес r даана ковекторлорду, б.а сызыктуу көз каранды эмес φ^k сызыктуу формаларын алалы (мындан ары $\overset{\rightarrow}{\varphi^k}$ белгисинин ордуна жөн эле φ^k белгилөөсүн пайдаланабыз). ψ_k – ушул эле V^* мейкиндиктин

$$\psi_k \wedge \varphi^k = 0 \qquad (k = 1,2,...,r) \tag{6}$$

шартты канааттандыра тургандай φ^k лардан башка элементтери болсун.

Картандын леммасы. (6) барабардык орун алышы үчүн, б.а. ψ_ℓ формалары φ^k формаларынын сызыктуу комбинациясы болушу үчүн $\psi_\ell = C_{\ell k}\varphi^k$ шартынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү (мында $C_{\ell k} = C_{k\ell}$).

Далилдөө. φ^k формаларын V^* мейкиндигинин кандайдыр бир базисине кошуп алалы: $\left(\varphi^1, \varphi^2, ..., \varphi^r, \varphi^{r+1}, ..., \varphi^n\right)$. Анда, $\psi_\ell = C_{\ell\alpha}\varphi^\alpha$ (мында $\alpha = 1,2,...,n$) орун алат. (1) барабардык төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$C_{k\alpha}\varphi^\alpha \wedge \varphi^k = 0 \tag{7}$$

Демек, барабардыктын сол жагындагы сырткы форма нөлдүк форма болот. Бул болсо $\overset{2}{\wedge} V^*$ вектордук мейкиндигинин элементи жана ал нөл вектор болуп жатат. Демек, $\overset{2}{\wedge}V^*$ мейкиндигинин каалаган базисинде бул вектордун координаталары нөлгө барабар болот. Базис $\varphi^\alpha \wedge \varphi^\beta \ (\alpha < \beta)$ элементтеринен түзүлгөн. (7) барабардыкты төмөндөгүдөй жазуу мүмкүн:

$$C_{k\ell}\varphi^\ell \wedge \varphi^k + C_{ka}\varphi^{a\cdot} \wedge \varphi^k = 0 \quad (k,\ell = 1, ..., r;\ a = r+1,...,n)$$

,же

$$\sum_{\ell<k}(C_{k\ell} - C_{\ell k})\varphi^\ell \wedge \varphi^k - C_{ka}\varphi^k \wedge \varphi^a = 0.$$

Берилген 2-даражадагы форманын $\overset{2}{\wedge}V^*$ мейкиндигинин базисинин элементтери боюнча ажыралышына ээ болдук. Ал эми форма – нөлдүк форма болгондуктан, $C_{k\ell} - C_{\ell k} = 0$, $C_{ka} = 0$ Ошентип,

$$\psi_k = C_{k\ell}\varphi^\ell,\ C_{k\ell} = C_{\ell k} \tag{8}$$

орун алат экен.

Тескерисинче, эгерде (8) орун алат десек, анда

$$\psi_k \wedge \varphi^k = C_{k\ell}\varphi^\ell \wedge \varphi^k = \sum_{\ell<k}(C_{k\ell} - C_{\ell k})\varphi^\ell \wedge \varphi^k = 0$$

Лемма далилденди.

§ 11. Сырткы дифференциалдык формалар

$X_n - \ C^k$ –көптүспөлдүүлүк болсун, $x \in X_n$ жана p – $0 \le p \le n$ шартын канааттандырган бүтүн сан деп эсептейли.

$\overset{p}{\wedge} T_x^*$ көптүгүн, б.а. T_x^* вектордук мейкиндигинин $p-$сырткы даражасын карайбыз. $\varphi - x$ чекитинин U чеке-белинде аныкталган карта болсун жана $\varphi(x)=\left(x^1,\dots,x^n\right)$ анда $(\partial_i)_x -$ T_x мейкиндигинин базиси болот, ал эми $\left(dx^i\right)_x -$ T_x^* мейкиндигиндеги ага түйүндөш базис болот.

Демек, $\overset{p}{\wedge} T_x^*$ вектордук мейкиндигинин базиси

$$\left(dx^{i_1}\right)_x \wedge \left(dx^{i_2}\right)_x \wedge \dots \wedge \left(dx^{i_p}\right)_x, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_p$$

көрүнүштөгү элементтерден түзүлгөн болот. Төмөндөгүдөй белгилөөнү кабыл алалы:0553171192

$$\overset{p}{\wedge} T^*(X_n) = \bigcup_{x \in X_n} \overset{p}{\wedge} T_x^* .$$

$\overset{p}{\wedge} T^*(X_n)$ көптүгү $n + C_n^p$ ченемдүү C^{k-1} - көптүспөлдүүлүк боло тургандыгын далилдөөгө болот [8]. Бул көптүспөлдүүлүк X_n дин үстүндөгү $p-$ ***формалардын катмарланышы*** деп аталат.

$\pi : \overset{p}{\wedge} T^*(X_n) \to X_n$ табигый проекциясы төмөндөгүдөй аныкталат: эгерде $\Omega \in \overset{p}{\wedge} T_x^*$ болсо, анда $\pi(\Omega) = x$.

V – чыныгы сандардын R талаасынын үстүндө берилген $n-$ ченемдүү вектордук мейкиндик болсун.

$$\left(\overset{p}{\wedge} T^*(X_n)\ , \quad X_n, \quad \overset{p}{\wedge} V^*, \pi \right)$$

төрттүгү (катмарлануу мейкиндиги – $\overset{p}{\wedge}T^{*}\left(X_n\right)$, базасы – X_n, типтүү катмары – $\overset{p}{\wedge}V^{*}$, проекциясы π болгон) катмарланган мейкиндик боло тургандыгын көрсөтүүгө болот.

X_n көптүспөлдүүлүгүндө аныкталган, C^r классына таандык, $p-$ даражадагы дифференциалдык форма (же $p-$ форма) деп $\overset{p}{\wedge}T^{*}\left(X_n\right)$ катмарланышынын C^r- кесилишин аташат. Эгерде $X_n \in C^k$ болсо, анда $r \le k-1$ [8] болот. Эгерде $\Omega -$ p - форма болсо, анда $\Omega|_x \in \pi^{-1}(x) = \overset{p}{\wedge}T_x^{*}$ болот. Демек,

$$\Omega|_x = a_{i_1\ldots i_p}\left(dx^{i_1}\right)_x \wedge \left(dx^{i_2}\right)_x \wedge\ldots\wedge \left(dx^{i_p}\right)_x, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_p.$$

$x \in X_n$ чекитинде $a_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ коэффициенттери чыныгы сандар болушат. Эгерде Ω дифференциалдык формасын карасак, анда $a_{i_1\ldots i_p}$-чыныгы функциялар болушат:

$\Omega = a_{i_1\ldots i_p}(x)dx^{i_1} \wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$, мында $dx^{i_k} = \left(dx^{i_k}\right)_x$

$\Omega \in C^r \Leftrightarrow$(бардык $a_{i_1\ldots i_p}(x) \in C^r$).

Ω p- формасы бүтүндөй X_n көптүспөлдүүлүгүндө аныкталган болушу шарт эмес, ал кандайдыр бир $G \subset X_n$ачык көптүгүндө гана аныкталган болушу мүмкүн.

Жогоруда $\Omega|_x$ - ковarianттык p- вектор экендигин көрдүк. Ошондуктан, G көптүгүндө Ω p- формасынын берилиши бул көптүктө ковarianттык p- вектордун талаасы берилгендигин билдирет. Демек, G көптүгүндөгү дифференциалдык форма ал көптүктө аныкталган тензордук талаанын жекече учуру болуп эсептелет. Ар кандай 1- форманы X_n көптүспөлдүүлүгүндө (же G көптүгүндө) аныкталган Пфаффтын формасы деп аташат. $X_n \in C^{\infty}$ жана $G \subset X_n$ ачык көптүк болсун. $A^p(G)$ аркылуу G көптүгүндө аныкталган (C^{∞} классына таандык болушкан) бардык $p-$ формалардын көптүгүн белгилейли. $A^p(G)$ көптүгү $F(G)$ - модуль боло тургандыгын текшерүүгө болот. $A^p(G)=F(G)$ деп алалы жана $A(G)=\sum\limits_{p=0}^{\infty} A^p(G)$ деп белгилейли. (б.а. $A(G)-A^p(G)$ сыяктуу $F(G)$ – модулдардын түз суммасы). $A(G)$ модулунун элементтери G көптүгүндө аныкталган сырткы дифференциалдык формалар деп аталышат. Алар ар бири p- формалар болушкан кошулуучулардан турушат жана кошулуучулардын саны нөлдөн айырмалуу болот.

$\theta, \omega \in \bar{A}(G)$ болсун. Бул формалардын ар бирин төмөндөгүдөй көрүнүштө бир маанилүү туюнтууга болот:

$$\theta=\sum_{p=0}^{\infty} z_p,\ \omega=\sum_{p=0}^{\infty} z'_q,\ z_p=A^p(G),\ z_q \in A^q(G).$$

$\theta \wedge \omega = \sum_{p,q} z_p \wedge z_q$ деп алалы. Бул болсо $A(G)\quad F(G)$ – модулунда көбөйтүү амалын аныктайт. Бул амалга карата $A(G)$ – $F(G)$ алкагынын үстүндө берилген ассоциативдик алгебра болуп калат. Ушундайча аныкталган алгебраны G көптүгүнүн үстүндө аныкталган ***сырткы алгебра*** (же ***Грассмандын алгебрасы***) деп аташат.

§12. Сырткы дифференцирлөө

$G \subset X_n$ ачык көптүгүндө төмөндөгүдөй p- форма берилген болсун:

$$\omega = a_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} .$$

Бул форманын сырткы дифференциалы деп төмөндөгүдөй $(p+1)$- форманы айтышат:

$$D\omega = da_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

(кээде $D\omega$ белгисинин ордуна $d\omega$ деп да жазышат).

$D\omega$ формасы G көптүгүндө x^k координаталарын тандап алуудан көз каранды болбой тургандыгын жеңил эле текшерүүгө болот.

Бул аныктоодон төмөндөгүдөй натыйжалар келип чыгат.

1-натыйжа. Функциянын толук дифференциалынан алынган сырткы дифференциал нөлгө барабар болот.

Далилдөө.

$$D(df)=D\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}dx^k\right)=d\,\frac{\partial f}{\partial x^k}\wedge dx^k=\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\partial x^i}dx^i\wedge dx^k=$$

$$=\sum_{i<k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\partial x^i}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^k}\right)dx^i\wedge dx^k=0.$$

2-натыйжа. Эгерде $\omega=a_{i_1 i_2\dots i_p}dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}$ – p - форма, $\theta=\text{в}_{j_1,\dots,j_q}dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_q}$ – ч - форма болсо, анда

$$D(\omega\wedge\theta)=(D\omega)\wedge\theta+(-1)^p\,\omega\wedge D\theta \tag{1}$$

орун алат.

Далилдөө.

$$\omega\wedge\theta=a_{i_1\dots i_p}\,\text{в}_{j_1\dots j_q}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_q}$$

болгондуктан, төмөндөгүнү алабыз:

$$D(\omega\wedge\theta)=\left(\text{в}_{j_1\dots j_q}da_{i_1\dots i_p}+a_{i_1\dots i_p}d\text{в}_{j_1\dots j_q}\right)\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}\wedge$$

$$\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_q}=\text{в}_{j_1\dots j_q}da_{i_1\dots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge$$

$$\wedge\dots\wedge dx^{j_q}+a_{i_1\dots i_p}\,d\text{в}_{j_1\dots j_q}\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_q}=$$

$$=\left(da_{i_1\dots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}\right)\wedge\left(\text{в}_{j_1\dots j_q}dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_q}\right)+$$

$$+a_{i_1\dots i_p}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}(-1)^p\wedge d\text{в}_{j_1\dots j_q}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_q}=$$

$$=(D\omega)\wedge\theta+(-1)^p\,\omega\wedge D\theta.$$

3-натыйжа. Эгерде $a\in F(G)$ (a ны– $p=0$ даражадагы дифференциалдык форма деп айтышат) болсо, анда

$$D(a\theta)=da\wedge\theta+aD\theta.$$

(Бул барабардык (1) ден $p=0$ болгон учурда келип чыгат).

4-натыйжа. $\omega = df^1 \wedge df^2 \wedge \ldots \wedge df^p$ (мында $f^k \in F(G)$) болсун. Анда $\omega = \left(df^1 \wedge df^2 \wedge \ldots \wedge df^{p-1}\right) \wedge df^p$ болот.

Далилдөө. (1) формуланы пайдаланып жана $D\left(df^k\right)=0$ (1-натыйжанын негизинде) экендигин эске алсак $D\omega = D\left(df^1 \wedge df^2 \wedge \ldots \wedge df^{p-1}\right) \wedge df^p$ келип чыгат. Ушул эле ой жүгүртүүнү кайталоо менен төмөндөгүнү алабыз:

$$D\omega = D\left(df^1 \wedge df^2 \wedge \ldots \wedge df^{p-2}\right) \wedge df^{p-1} \wedge df^p = \ldots =$$
$$= D\left(df^1\right) \wedge df^2 \wedge \ldots \wedge df^p = 0.$$

5-натыйжа. $D(\omega_1 + \omega_2) = D\omega_1 + D\omega_2$.

(Далилдөөнүн зарылчылыгы жок).

6-натыйжа. (Пуанкаренин теоремасы). Сырткы дифференциалдан алынган сырткы дифференциал нөлгө барабар болот.

Далилдөө. $\omega = a_{i_1 i_2 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ болсун.

Анда $$D\omega = da_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

4- жана 5- натыйжалардын негизинде $D(D\omega)=0$ келип чыгат.

Эгерде $D\omega = 0$ болсо, анда ω сырткы дифференциалдык формасы ***туюк форма*** деп аталат. Эгерде $\omega = D\theta$ орун ала тургандай θ формасы жашаса, анда ω формасы ***анык форма*** деп аталат.

Пуанкаренин теоремасынын негизинде ар кандай анык дифференциалдык форма туюк боло тургандыгын көрөбүз. Тескерисинче ырастоо туура болбойт:

$\omega = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ *1*- формасы $R\backslash\{0\}$ көптүгүндө туюк, бирок анык форма болбойт.

Бирок, локалдык түрдө караганда тескерисинче ырастоо деле туура болот, б.а. эгерде $\omega - U$ координаталык чеке-белинде аныкталган туюк форма болсо, анда бул чеке-белде $\omega = D\theta$ шарты аткарыла тургандай θ формасы жашайт [6]. Локалдык түрдө туура болгон бул ырастоо дифференцирленүүчү көптүспөлдүүлүктөрдүн топологиясында чоң мааниге ээ.

Эми ω *1*- формасы качан толук дифференциал болот деген суроого жооп берели. Эгерде $\omega = df$ болсо, анда $D\omega = 0$.

Тескерисинче, $\omega = a_i dx^i$ жана $D\omega = 0$ б.а. $da_i \wedge dx^i = 0$ же

$\dfrac{\partial a_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i = 0$ деп алалы.

Мындан

$$\sum_{k<l} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i} \right) dx^k \wedge dx^i = 0$$

келип чыгат жана окшош мүчөлөрү жыйналган

болгондуктан, $\dfrac{\partial a_i}{\partial x^k} = \dfrac{\partial a_k}{\partial x^i}$.

Бул учурда (анализ курсунан белгилүү болгондой) x чекитинин кандайдыр бир U чеке-белинде $a_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ боло тургандай $f\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ функциясы жашайт. Демек, $\omega = \dfrac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ болот. Ошентип, U чеке - белинде $\omega = Df$ барабардыгы орун алат.

$X_n, Y_k - C^\infty$ классына таандык көптүспөлдүүлүктөр жана $f : X_n \to Y_k - C^\infty$ - классына таандык чагылтуу, ал эми $\omega - Y_k$ көптүспөлдүүлүгүндө аныкталган кандайдыр бир p - форма болсун. $U \subset X_n$ жана $V \subset Y_k$ - ачык көптүктөр жана $\varphi \mid \varphi(x) = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$, $\psi \mid \psi(y) = \left(y^1, y^2, \ldots, y^k\right)$ - тиешелеш түрдө бул көптүктөрдөгү координаталар системалары болсун. Мында $f(U) \subset V$ деп алалы. f чагылтуусу U көптүгүндө координаталар аркылуу $y^j = y^j\left(x^1, \ldots, x^n\right)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ көрүнүшүндө туюнтулат.

X_n көптүспөлдүүлүгүндө $\omega^* = f^*(\omega)$ p - формасын төмөндөгүдөй аныктоого болот: эгерде ω формасы V көптүгүндө

$$\omega = a_{i_1 \ldots i_p}\left(y^1, \ldots, y^k\right) dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_p} \tag{2}$$

көрүнүштө туюнтулса, анда

$$\omega^* = \bar{a}_{i_1 \ldots i_p}\left(x^1, \ldots, x^n\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

болот, мында

$$\overline{a}_{i_1 \dots i_p}\left(x^i\right) = a_{j_1,\dots,j_p}\left(y^1\left(x^i\right),\dots,y^k\left(x^i\right)\right)\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial y^{j_p}}{\partial x^{i_p}}. \qquad (3)$$

ω формасына $y^j = y^j\left(x^1,\dots,x^n\right)$ жана $dy^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}dx^i$ барабардыктарын коюу менен ω^* формасына ээ болобуз. (2), (3) формулалардан Y_k көптүспөлдүүлүгүндөгү формаларды X_n көптүспөлдүүлүгүндөгү формаларга чагылтуучу f^* чагылтуусу $f^*(\omega) = \omega \circ df$ закону боюнча аныктала тургандыгы келип чыгат. Түздөн түз эсептөөлөрдүн натыйжасында

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \left(f^*(\omega_1)\right)\wedge\left(f^*(\omega_2)\right),\ D\left(f^*(\omega)\right) = f^*(D\omega)$$

экендигине ишенүүгө болот. Ошондуктан, f^* чагылтуусу $A(Y_k)$ сырткы алгебрасын $A(X_n)$ сырткы алгебрасына гомоморфтук чагылтуу болот экен.

§13. Көптүспөлдүүлүктөгү бөлүштүрүүлөр жана кобөлүштүрүүлөр

Ар бир $x \in X_n$ чекитинде T_x жаныма вектордук мейкиндик жашайт (аны $T_x(X_n)$ көрүнүшүндө да белгилешет). $1 \le p \le n-1$ шартын канааттандыра тургандай p натуралдык санын алабыз. $T_p(x) - T_x$ мейкиндигинин p -

ченемдүү камтылуучу мейкиндиги болсун, ал эми $T_p = \{T_p(x) \mid x \in X_n\}$ – бардык $x \in X_n$ үчүн T_x мейкиндигинин мүмкүн болгон бардык $T_p(x)$ камтылуучу мейкиндиктеринин көптүгү болсун.

$x \in X_n$ элементи үчүн $\Delta_p(x) = T_p(x) \subset T_x(X_n)$ боло тургандай $\Delta_p : X_n \to T_p$ чагылтуусу X_n көптүспөлдүүлүгүндөгү p- ***ченемдүү бөлүштүрүү*** (же p- ***ченемдүү дифференциал-дык система***) деп аталат. Мында $\Delta_p(x)$– T_x жаныма вектордук мейкиндигинин анык бир камтылуучу вектордук мейкиндиги ([4], [6]).

Эгерде x чекитинин кандайдыр бир U чеке - белинде C^κ классына таандык болушкан $X_1, X_2, ..., X_p$ вектордук талаалары жашап, каалаган $x_o \in U$ чекитинде $X_{1|x_o}, ..., X_{p|x_o}$ векторлору $\Delta_p(x_o)$ камтылуучу мейкиндигин жаратышса (б.а. ушул камтылуучу мейкиндиктин базисин түзүшсө), анда Δ_p бөлүштүрүүсү $x \in X_n$ чекитинде C^κ ***классына таандык болот*** деп айтышат. Биз C^∞ классына таандык бөлүштүрүүлөрдү карайбыз.

Ар бир $x \in X_n$ чекитинде ковекторлордун T_x^* жаныма мейкиндиги жашайт. $1 \le q \le n-1$ боло тургандай q натуралдык санын алабыз. $T_q^*(x) - T_x^*$ мейкиндигинин q-

ченемдүү камтылуучу мейкиндиги жана $T_q^* = \left\{ T_q^*(x) | x \in X_n \right\}$ болсун.

X_n көптүспөлдүүлүгүндөгү q- ченемдүү кобөлүштүрүү (же рангы q санга барабар болгон Пфаффтын системасы) деп төмөндөгүдөй $\theta_q : X_n \to T_q^*$ чагылтуусун айтабыз:

$$\forall x \in X_n \ \theta_q(x) = T_q^*(x) \subset T_x^*.$$

Эгерде x чекитинин кандайдыр бир U чеке-белинде C^k классына таандык болушкан $\theta^1, \theta^2, ..., \theta^q$ 1-формалары жашап жана алар ар бир $x_o \in U$ чекитинде $\left\{ \theta_q \right\}$ системасын жаратышса (демек, θ^j – сызыктуу көз каранды эмес), анда θ_q кобөлүштүрүүсү $x \in X_n$ чекитинде C^κ классына таандыкболот деп айтышат.

$\theta^j = a_i^j dx^i \left(i = 1, 2, ..., n; \ j = 1, 2, ..., q \right)$ болсун дейли.

Ар бир $x \in X_n$ чекитинде $(n-q)$ – ченемдүү $T_{n-q}(x) \subset T_x$ камтылуучу вектордук мейкиндик жашап, $\forall X \in T_{n-p}(x)$: $\theta^j(X) = 0$ орун алат. Бул болсо X_n көптүспөлдүүлүгүндө $\forall x \in X_n$ үчүн $\Delta_{n-q}(x) = T_{n-q}(x)$ боло тургандай Δ_{n-q} бөлүштүрүүсүн аныктайт. Бул учурда Δ_{n-q} бөлүштүрүүсү θ_q кобөлүштүрүүсү тарабынан ассоцирленген деп айтышат [4].

Тескерисинче, X_n жылма көптүспөлдүүлүгүндө Δ_p бөлүштүрүүсү берилген болсун. Ар бир $x \in X_n$ чекитинде p-

ченемдүү вектордук камтылуучу $\Delta_p(x) \subset T_x$ мейкиндик жашайт. $\Delta_p(x)$ камтылуучу мейкиндигин $(n-p)$ даана, ар түрдүү $(n-1)$ – ченемдүү $H_a\,(a = p+1,...,n)$ вектордук мейкиндиктеринин кесилиши катары кароого болот.

Чындыгында эле, T_x мейкиндигинин кандайдыр бир $B = (\vec{e}_1,...,\vec{e}_p, e_{p+1},...,\vec{e}_n)$ базисин алалы жана $\vec{e}_t \in \Delta_p(x)$ $(t = 1, 2,..., p)$ болсун дейли. H_a аркылуу T_x мейкиндигинин $B \backslash \{\vec{e}_a\}$ векторлору тарабынан (бекемделген a үчүн) жаратылган камтылуучу мейкиндигин белгилейли. H_a камтылуучу мейкиндиктери ар түрдүү жана $\Delta_p(x) = \bigcap H_a$ экендиги түшүнүктүү. $\theta = (\theta^1, \theta^2,..., \theta^n) - T_x^*$ мейкиндигинин корепери жана ал T_x мейкиндигинин B реперине түйүндөш болсун дейли. Анда $\theta^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j$ $(i, j = 1, 2,..., n)$ болот. Демек, $\theta^a(\vec{e}_j) = 0$ (бардык $j \neq a$ үчүн) орун алат. Ошондуктан $\theta^a = 0$ ($a-$ бекемделген) теңдемеси $\Delta_p(x)$ ти кармап турган H_a камтылуучу мейкиндигин аныктайт.

Ошентип, берилген Δ_p бөлүштүрүүсү $(n-p)$ – ченемдүү $\theta_{n-p} = \{\theta^{p+1},...,\theta^n\}$ кобөлүштүрүүсү менен ассоцирленген болот. 1- формалардын θ^a системасын Δ_p бөлүштүрүүсү менен ассоцирленген система деп аташат.

Эгерде $X_t(s,t=1,2,...,p)$ вектордук талаалары Δ_p бөлүштүрүүсүн жаратышса жана $f_t^s \in F(X_n)$ функциялары $\forall x \in X_n$: $\det\|f_t^s\| \neq 0$ шартын канааттандырса, анда $\overline{X}_t = f_t^s X_s$ вектордук талаалары да ушул эле Δ_p бөлүштүрүүсүн жаратышат.

Ушуга эле окшош, эгерде θ^a 1- формалары $(n-p)$ – ченемдүү θ_{n-p} кобөлүштүрүүсүн жаратышса, ал эми $h_a^в \in F(X_n)$ функциялары $\forall x \in X_n$: $\det\|h_a^в\| \neq 0$ шартын канааттандырса, анда $\theta^в = h_a^в \theta^a$ 1- формалары ушул эле θ_{n-p} кобөлүштүрүүсүн жаратышат.

$\forall x \in X_n$ чекитинде $\Re^x = \{\vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_n\}$ реперин жана ага түйүндөш $\theta_x = \{\theta^1, \theta^2, ..., \theta^n\}$ корeперин алалы. Демек, $\theta^i(\vartheta_j) = \delta_j^i$. $\xi \in T_x$ векторун карайбыз. $\xi = \xi^i \vartheta_i$ болсун. Анда

$$\theta^i(\xi) = \theta^i(\xi^j \vartheta_j) = \xi^j \theta^i(\vartheta_j) = \xi^j \delta_j^i = \xi^i.$$

Ошентип, $\xi^i = \theta^i(\xi)$ экен, ошондуктан $\xi = \theta^i(\xi)\vartheta_i$ деп жазууга болот. Демек, θ^i 1- формалардын өздөрү ξ векторунун $\Re^x$ репериндеги координаталары болушат экен. $\forall \xi \in T_x$ вектору үчүн θ^i формаларынын $\theta^i = \xi^i$ боло тургандай маанилерин табуу мүмкүн (ал үчүн $\theta^i = \theta^i(\xi)$ деп алуу керек). Айрым учурда $\forall \xi \in T_x \quad \xi = \hat{\xi}^i \partial_i$ үчүн dx^i формаларынын $\hat{\xi}^i = dx^i$ боло тургандай маанилерин табуу мүмкүн.

$f \in F(X_n)$ функциясын жана каалагандай $\vartheta \in T_x$, $\vartheta = \vartheta^i \partial_i$ векторун алабыз. f функциясынын дифференциалы df төмөндөгүдөй аныкталган сызыктуу форма болот:

$$\forall \vartheta \in T_x : (df)(\vartheta) = \vartheta(f).$$

$\vartheta(f) = \vartheta^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ болгондуктан, $dx^i = \vartheta^i$ деп алсак $\vartheta(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} dx^i$ болот. Бул болсо f функциясынын анализ курсунда аныкталган дифференциалынын өзү.

Эгерде X_n көптүспөлдүүлүгүндө $f = const$ болсо, анда $df = 0$ (себеби $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$) болот. Төмөндөгүдөй жыйынтыкка келебиз: эгерде X_n көптүспөлдүүлүгүндө f функциясы туруктуу болсо, анда анын df дифференциалы ар бир $x \in X_n$ чекитинде каалаган $\vartheta \in T_x$, вектору менен нөлгө айлана турган 1- форма болуп эсептелет: $(df)(\vartheta) = 0$. Тескерисинче ырастоо да туура болот: эгерде $f \in F(X_n)$ жана $\forall \vartheta \in T_x \, \forall x \in X_n$: $(df)(\vartheta) = 0$ болсо, анда X_n көптүспөлдүүлүгүндө $f = const$ болот. (бул анализден белгилүү).

X_n жылма көптүспөлдүүлүгүндө Δ_p бөлүштүрүүсү берилген болсун. $V_p \subset X_n$ камтылуучу көптүспөлдүүлүгү Δ_p бөлүштүрүүсүнүн интегралдык көптүспөлдүүлүгү деп аталат, эгерде $\forall x \in V_p: \Delta_p(x) = T_x(V_p)$ болсо.

Эгерде ар бир $x \in X_n$ чекити үчүн Δ_p бөлүштүрүүсүнүн ушул чекит аркылуу өтүүчү $p-$ ченемдүү интегралдык көптүспөлдүүлүгү жашаса, анда Δ_p бөлүштүрүүсү интегралдануучу (же толук интегралдануучу) бөлүштүрүү деп аталат.

θ_{n-p} кобөлүштүрүүсү толук интегралдануучу кобөлүштүрүү деп аталат, эгерде аны менен ассоцирленген Δ_p бөлүштүрүүсү толук интегралдануучу болсо. Эгерде θ_{n-p} кобөлүштүрүүсү сызыктуу көз каранды эмес θ^a Пфаффтын формаларынын системасы менен берилген болсо, анда θ^a формаларынын системасын да толук интегралдануучу система деп аташат.

X_n көптүспөлдүүлүгүндө берилген Δ_p бөлүштүрүүсү толук интегралдануучу болсун дейли. Анда ар бир $x \in X_n$ чекити аркылуу бул бөлүштүрүүнүн V_p интегралдык көптүспөлдүүлүгү өтөт.

x чекити X_n көптүспөлдүүлүгүнүн чекити катары φ картасына (координаталык чеке – бели кандайдыр бир $U \subset X_n$ көптүгү болгон) ээ болот:

$$\varphi : U \to R^n,\ \varphi(x) = \left(x^1, \ldots, x^n\right) \in R^n. \qquad (1)$$

x чекити V_p камтылуучу көптүспөлдүүлүгүнүн чекити катары ψ картасына (координаталык чеке-бели кандайдыр бир $V \subset V_p$ көптүгү болгон) ээ болот:

$$\psi : V \to R^p,\ \psi(x) = \left(t^1, \ldots, t^p\right) \in R^p.$$

Мындан, $x = \psi^{-1}\left(t^1, \ldots, t^p\right)$ жана (1) нин негизинде $\left(x^1, \ldots, x^n\right) = \varphi \circ \psi^{-1}\left(t^1, \ldots, t^p\right)$ болот. Ошондуктан

$$x^i = x^i\left(t^1, \ldots, t^p\right) \qquad (2)$$

X_n жылма көптүспөлдүүлүк, ал эми V_p – анын жылма камтылуучу көптүспөлдүүлүгү болгондуктан, (2) функциялар дифференцирленүүчү болушат.

$f \in F(X_n), f = f\,|_{V_p}$ болсун дейли. Анда

$$\frac{\partial f_1}{\partial t^k} = \frac{\partial f_1}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t^k}, \text{б.а. } \frac{\partial}{\partial t^k} = \frac{\partial x^t}{\partial t^k}\frac{\partial}{\partial x^i}, (i = 1, 2, \ldots, n; к = 1, 2, \ldots, p)$$

(3)

Бирок, $\left(\frac{\partial}{\partial t^k}\right)$ – $T_x(V_p)$ мейкиндигинин табигый репери, ал эми $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ – $T_x(X_n)$ мейкиндигинин табигый репери экендигин билебиз. Бул реперлердин векторлору сызыктуу көз каранды эмес болушкандыктан, (3) дөн төмөндөгүдөй жыйынтыкка келебиз:

$$\forall x \in V_p : \quad \text{ранг} \left\| \frac{\partial x^i}{\partial t^k} \right\| = p.$$

x чекитинин x^i координаталарын ар дайым $det \left\| \frac{\partial x^t}{\partial t^k} \right\| \neq 0 \ (k, t = 1, 2, ..., p)$ боло тургандай номерлеп алууга болот. (2) системанын биринчи p теңдемесин t^k ларга карата (локалдык учурда гана) чечебиз: $t^k = t^k \left(x^1, x^2, ..., x^p \right)$.

Табылгандарды (2) системанын калган $(n-p)$ теңдемелерине коюп, төмөндөгүнү алабыз:

$$x^{\alpha} = x^{\alpha} \left(x^1, x^2, ..., x^p \right), (\alpha = p+1, ..., n) \qquad (4)$$

(4) теңдемелер x чекитинин кандайдыр бир $U^* \subset U$ чеке – белинде V_p көптүспөлдүүлүгүн аныкташат.

Биз берилген Δ_p бөлүштүрүүсүнүн бир V_p интегралдык көптүспөлдүүлүгү үчүн (4) теңдемелерди алдык. Δ_p бөлүштүрүүсү толук интегралдануучу болгондуктан, ар бир $x \in U^*$ чекити аркылуу бул бөлүштүрүүнүн p- ченемдүү интегралдык көптүспөлдүүлүгү өтөт жана ал көптүспөлдүүлүктү U^* чеке-белинде (4) көрүнүштөгү теңдемелер системасы менен берүүгө болот. Демек, интегралдык көптүспөлдүүлүктөрдүн көрсөтүлгөн тобу $(n-p)$ даана эркин турактуу чоңдуктардан көз каранды болот жана U^* чеке-белинде

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}\left(x^1, x^2, ..., x^p,\ \ c^{p+1}, ..., c^n\right) \qquad (5)$$

көрүнүштөгү система менен аныкталат. Биз x^{α} функциялары x^{I} жана c^{β} лар боюнча дифференцирленүүчү жана

ранг $\left\| \dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial c^{\beta}} \right\| = n - p$ деп эсептейбиз.

(5) теңдемелерди c^{α} ларга карата чечсек, төмөндөгүнү алабыз:

$$y^{\alpha}\left(x^1, ..., x^n\right) = c^{\alpha}\ . \qquad (6)$$

Эгерде каалаган $x_o\left(x_o^i\right) \in U^*$ чекитин алсак, анда анын координаталарын (6) га коюп, $c^{\alpha} = y^{\alpha}\left(x_o^1, ..., x_o^n\right)$ маанилерин аныктайбыз. Демек, $y^{\alpha}\left(x^I, ..., x^n\right) = y^{\alpha}\left(x_o^I, ..., x_o^n\right)$ - x_o чекити аркылуу өтүүчү интегралдык көптүспөлдүүлүктү аныктайт. (6) теңдемелердин сол жагындагы функциялар эч кандай функционалдык көз карандылыкта болушпайт, б.а. $\Phi\left(y^{p+I}, ..., y^n\right) \equiv 0$ боло тургандай дифференцирленүүчү $\Phi\left(u^{p+I}, ..., u^n\right) \neq 0$ функциясы жашабайт.

Тескерисинче болжолдосок, анда биз $\Phi\left(c^{p+1}, ..., c^n\right) = 0$ барабардыгына ээ болобуз. Мындан c^{α} ны калгандары аркылуу туюнтуу мүмкүн болуп калмак. Демек, (5) теңдемелердеги турактуулардын санын азайтууга болот деген жыйынтык чыкмак. Бул болсо ранг $\left\|\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial c^{\beta}}\right\| = n - p$ экендигине каршы келмек. y^{α} функцияларынын арасында функционалдык көз карандылык жок болгондуктан, dy^{α} - каалаган $x \in X_n$ чекитинде сызыктуу көз каранды эмес 1-формалар болушат. Δ_p бөлүштүрүүсүнүн ар бир V_p интегралдык көптүспөлдүүлүгүндө $y^{\alpha} = const$. Ошондуктан, жогорудагы-лардын негизинде dy^{α} 1- формалары каалаган $\vartheta \in T_x(V_p)$ вектору менен нөлгө айланышат. Ошентип, $(n-p)$ даана сызыктуу көз каранды эмес dy^{α} Пфаффтын формалары $\theta_{n-p} = \{\theta^{\alpha}\}$ кобөлүштүрүүсүн аныкташат, бул кобөлүштүрүү менен Δ_p толук интегралдануучу бөлүштүрүүсү ассоцирленген болот. $y^{\alpha}(x^1, ..., x^n)$ функциялары ((6) формуладагы) Пфафф-тын толук интегралдануучу $\theta^{\alpha} = 0$ системасынын биринчи интегралдары деп аталышат, ал эми (6) барабардыктардын системасы Пфаффтын системасынын жалпы интегралы деп аталат.

Эгерде Δ_p бөлүштүрүүсү θ^{β} 1- формалары менен берилген θ_{n-p} кобөлүштүрүүсү менен ассоцирленген болсо, анда кубулбаган $\left\|h_{\alpha}^{\beta}\right\|$ матрицасы $\left(h_{\alpha}^{\beta} \in F(X_n)\right)$ жашап,

$$\theta^{\beta} = h_{\alpha}^{\beta} dy^{\alpha} \tag{7}$$

шарт орун алат.

Тескерисинче, эгерде (7) шарт орун алса (мында $\forall x \in X_n \ \ det\left\|h_{\alpha}^{\beta}\right\| \neq 0$), анда θ^{β} Пфаффтын системасы менен да ошол эле Δ_p бөлүштүрүүсү ассоцирленген болот (Δ_p бөлүштүрүүсү dy^{α} системасы менен ассоцирленген бөлүштүрүү экендигин жогортодон билебиз). dy^{α} системасы толук интегралдануучу экендиги түшүнүктүү. Демек, θ^{β} системасы да толук интегралдануучу болот.

Ошентип, Пфаффтын θ^{β} системасы толук интегралдануучу болушу үчүн ар бир $x \in X_n$ чекитинин ушундай бир U чеке – бели жана ушундай $y^{\alpha}, h_{\alpha}^{\beta} \in F(U)$ функциялары жашап,

$$\forall x \in U: \quad det\left\|h_{\alpha}^{\beta}\right\| \neq 0, \quad \theta^{\beta} = h_{\alpha}^{\beta} dy^{\alpha}$$

болушу зарыл жана жетиштүү.

§14. Фробениустун теоремасы

X_n жылма көптүспөлдүүлүгүндө θ_{n-p} кобөлүштүрүүсү (Пфаффтын системасы) сызыктуу көз каранды эмес $\theta^{\alpha}(\alpha, \beta = p+1,...,n)$ 1- формалар менен берилген болсун.

Теорема 2. 2. (Фробениустун теоремасы)

θ_{n-p} көбөлүштүрүүсү толук интегралдануучу болушу үчүн

$$D\theta^{\alpha} = \theta^{\beta} \wedge \theta^{\alpha}_{\beta} \tag{1}$$

шартты канааттандыра тургандай θ^{α}_{β} 1- формаларынын жашашы зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө. Пфаффтын θ^{α} системасы толук интегралдануучу болсун дейли. Анда ар бир $x \in X_n$ чекити үчүн анын ушундай бир U чек-бели жана ушундай h^{β}_{α} функциялары жашап, $\forall x \in U : det\left\|h^{\beta}_{\alpha}\right\| \neq 0$ жана

$$\theta^{\alpha} = h^{\alpha}_{\beta} dy^{\beta} \tag{2}$$

орун алат. Демек, $D\theta^{\alpha} = dh^{\alpha}_{\beta} \wedge dy^{\beta}$ (2) барабардыктан $dy^{\beta} = \tilde{h}^{\beta}_{\gamma}\theta^{\gamma}$ табылат. Ошондуктан,

$$D\theta^{\alpha} = dh^{\alpha}_{\beta} \wedge \tilde{h}^{\beta}_{\gamma}\theta^{\gamma} = \theta^{\gamma} \wedge \left(-\tilde{h}^{\beta}_{\gamma} dh^{\alpha}_{\beta}\right);$$

$D\theta^{\alpha} = \theta^{\gamma} \wedge \theta^{\alpha}_{\gamma}$, мында $\theta^{\alpha}_{\gamma} = -\tilde{h}^{\beta}_{\gamma} dh^{\alpha}_{\beta}$.

Зарылдык шарты далилденди.

Эми жетиштүүлүк шартын далилдейли. Пфаффтын

$$\theta^{\alpha} = 0 \tag{3}$$

теңдемелер системасы берилген болсун, мында

$$\theta^{\alpha} = a^{\alpha}_{i} dx^{i} \;\; (\alpha = p+1,\dots,n;\, i = 1,2,\dots,n).$$

$x \in X_n$ чекитинин U чеке - белинде бул теңдемелер сызыктуу көз каранды болушпайт. Эгерде (3) системада $n-p=n-1$ (б.а. $p=1$) болсо, анда dx^i лердин арасындагы байланышты табабыз:

$$\frac{dx^i}{\varphi^i}=...=\frac{dx^n}{\varphi^n} \text{(мында } \varphi^i=\varphi^i\left(x^1,x^2,...,x^n\right)\text{)}.$$

Бул болсо кадимки дифференциалдык теңдемелердин нормалдык системасы болот. U чеке-белинде φ^i функциялары үзгүлтүксүз жана $x^1, x^2, ..., x^n$ аргументтеринин ар бири боюнча үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болот деп эсептесек (дифференциалдык теңдемелердин теориясынан белгилүү болгондой), бул системанын жалпы интегралын төмөндөгүдөй көрүнүштө жазуу мүмкүн:

$$y^h\left(x^1,...,x^n\right)=C^h, (h=2, 3,...,n);$$

б.а. көз каранды эмес $n-1$ сандагы биринчи интегралдардын системасын алабыз $\left(C^h=const\right)$. Демек, ар бир $x_o \in U$ чекити аркылуу (3) системанын жалгыз гана интегралдык көптүспөлдүүлүгү (интегралдык ийриси) өтөт. Ошентип, $n-p=n-1$ болгон учурда (3) система толук интегралдануучу экен.

Эми индукция методун колдонобуз.

$p=k-1(k>1)$ үчүн теорема далилденди деп болжолдойлу. $p=k$ деп алабыз жана (1) шарттарды канааттандыруучу (3) системаны карайбыз.

$x^n = x_o^n$, $dx^n = 0$ (мында $x_o\left(x_o^1,...,x_o^n\right)\in U$) деп алалы. Анда (3) система $n-1$ өзгөрмөлүү $n-k$ сандагы Пфаффтын теңдемелеринин системасы болот. Бул система үчүн $p' = (n-1)-(n-k) = k-1$. Демек, болжолдоо боюнча бул система толук интегралданууччу жана ал $n-k$ сандагы ар түрдүү биринчи интегралдарга ээ болот:

$$y^\alpha\left(x^1,...,x^{n-1}\right) = const,\ (\alpha,\beta = 1,2,...,n-k).$$

Жалпылыкты бузбастан, U чеке – белинде $det\left\|\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right\| \neq 0$ деп эсептөөгө болот. Ошондуктан $y^\alpha = y^\alpha\left(x^1,...,x^{n-1}\right)$ теңдемелерин x^α га карата чечүүгө болот:

$$x^\alpha = x^\alpha\left(y^1,...,y^{n-k}, x^{n-k+1},...,x^{n-1}\right).$$

x^α нын бул туюнтулуштарын (3) системаға ордуна койсок, төмөндөгүдөй системаны алабыз:

$$\overline{\theta}^\alpha = 0 \tag{4}$$

Бул система $x^n = x_o^n$, $dx^n = 0$ болгон учурда $dy^\alpha = 0$ системасына эквиваленттүү (түзүлүшү боюнча). Демек, (3) система ((4) система сыяктуу эле) төмөндөгү системага эквиваленттүү болот:

$$\widetilde{\theta}^\alpha = dy^\alpha + z^\alpha dx^n = 0, \tag{5}$$

мында

$$z^\alpha = z^\alpha\left(y^1,...,y^{n-k}, x^{n-k+1},...,x^n\right).$$

(5) система (1) барабардыктарды канааттандырат (шарт боюнча), б.а. $D\widetilde{\theta}^{\alpha} = \widetilde{\theta}^{\beta} \wedge \widetilde{\theta}_{\beta}^{\alpha}$ (мында $\widetilde{\theta}_{\beta}^{\alpha}$ - кандайдыр бир сызыктуу формалар). (4) дөн төмөндөгүлөрдү табабыз:

$$D\widetilde{\theta}^{\alpha} = dz^{\alpha} \wedge dx^{n} = \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial y^{\beta}} dy^{\beta} \wedge dx^{n} + \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^{t}} dx^{t} \wedge dx^{n},$$

$(t = n-k+1,\dots,n-1)$.

(4) системадан $dy^{\beta} = \widetilde{\theta}^{\beta} - z^{\beta} dx^{n}$ келип чыккандыктан, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$D\widetilde{\theta}^{\alpha} = \widetilde{\theta}^{\beta} \wedge \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial y^{\beta}} dx^{n} + \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^{t}} dx^{t} \wedge dx^{n} = \widetilde{\theta}^{\beta} \wedge \widetilde{\theta}_{\beta}^{\alpha}$$

((1) барабардыктар шарт боюнча аткарылгандыктан). $\widetilde{\theta}^{\beta}$ жана dx^{t} формалары көз каранды эмес болгондуктан, акыркы барабардык

$$\frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^{t}} = 0 \ \ (t = n-k+1,\dots,n-1)$$

болгон учурда гана орун алат. Демек, $z^{\alpha} = z^{\alpha}\left(y^{1},\dots,y^{n-k},x^{n}\right)$. Ошондуктан, (5) - y^{α}, x^{n} өзгөрүлмөлөрүнө карата кадимки дифференциалдык теңдемелердин нормалдык системасы. Анын жалпы интегралы төмөндөгүдөй көрүнүштө болот.

$$U^{\alpha}\left(y^{1},\dots,y^{n-k},x^{n}\right) = C^{\alpha} = const \ \ (\alpha = 1, 2,\dots,n-k)$$

Демек, (3) система $dU^{\alpha} = 0$ системасына эквиваленттүү, б.а. толук интегралдануучу.

Теорема далилденди.

Эскертүү 2. 1. (1) жана (3) нү салыштырып, Фробениустун теоремасын башкача да айтууга боло тургандыгын көрөбүз: Пфаффтын (3) теңдемелер системасы толук интегралдануучу болушу үчүн сырткы дифференциалдарынын нөлгө барабар болушу $\left(D\theta^\alpha = 0\right)$ (3) системанын өзүнүн алгебралык натыйжасы катары келип чыгышы зарыл жана жетиштүү.

Эскертүү 2. 2. $\theta^\alpha = 0$ - Пфаффтын сызыктуу көз каранды эмес теңдемелер системасын карайлы, б.а.

$$a_i^\alpha\left(x^1,...,x^n\right)dx^i = 0 \ \left(\alpha = 1,2,...,n-p\right)$$

системасын карайбыз. Шарт боюнча ранг $\left\|a_i^\alpha\right\| = n-p$ ($x \in X_n$ чекитинин кандайдыр бир U чеке – белинде). Аныктык үчүн $det\left\|a_\beta^\alpha\right\| \neq 0$ деп алалы. Төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү киргизели:

$$x^\alpha = z^\alpha,\ x^{n-p+1} = u^1,...,x^n = u^p.$$

Берилген система төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$a_\beta^\alpha\left(z^1,...,z^{n-p},u^1,...,u^p\right)dz^\beta + a_t^\alpha\left(z^1,...,z^{n-p},u^1,...,u^p\right)du^t = 0$$

Мындан $dz^\beta + a_t^\alpha \tilde{a}_\alpha^\beta du^t = 0$ же

$$dz^\beta = \psi_t^\beta du^t, \qquad (6)$$

бул жерде

$$\psi_t^\beta = -a_t^\alpha \tilde{a}_\alpha^\beta = \psi_t^\beta\left(z^1,...,z^{n-p},u^1,...,u^p\right).$$

p- ченемдүү V_p интегралдык көптүспөлдүүлүгүндө z^β өзгөрүлмөлөрү көз каранды эмес u^ι белгисиздерине карата функциялар болушат: $z^\beta = z^\beta\left(u^1,\dots,u^p\right)$. Демек, (6) системаны төмөндөгүдөй көрүнүштө жазуу мүмкүн:

$$\frac{\partial z^\beta}{\partial u^\iota} du^\iota = \psi_\iota^\beta du^\iota .$$

du^ι дифференциалдары көз каранды эмес болушкандыктан

$$\frac{\partial z^\beta}{\partial u^\iota} = \psi_\iota^\beta\left(z^1,\dots,z^{n-p},u^1,\dots,u^p\right). \tag{7}$$

Тескерисинче, (7) көрүнүштөгү системаны (6) түргө келтирүүгө болот. Демек, $\theta^\alpha = 0$ көрүнүшүнө келтирүү мүмкүн. Ошентип, Пфаффтын n өзгөрмөлүү, $n-p$ сандагы сызыктуу көз каранды эмес теңдемелеринин системасы ($\theta^\alpha = 0$ көрүнүштөгү) (7) көрүнүштөгү жекече туундудагы теңдемелер системасына эквиваленттүү экен.

(7) системанын толук интегралдануучулук шартын табалы, б.а. ага эквиваленттүү болгон

$$-dz^\alpha + \varphi_\iota^\alpha du^\iota = 0 \tag{8}$$

көрүнүштөгү Пфаффтын теңдемелер системасынын толук интегралдануучулук шартын табалы. Ал үчүн $D\left(-dz^\alpha + \psi_\iota^\alpha du^\iota\right) = 0$, б.а. $d\psi_\iota^\alpha \wedge du^\iota = 0$ барабардыктары (8) системанын (же (7) системанын) алгебралык натыйжасы болсун деп шарт коебуз да, төмөндөгүлөрдү алабыз:

$$\left(\frac{\partial\psi_t^\alpha}{\partial z^\beta}dz^\beta+\frac{\partial\psi_t^\alpha}{\partial u^s}du^s\right)\wedge du^t=0,$$

же

$$\left(\frac{\partial\psi_t^\alpha}{\partial z^\beta}\psi_s^\beta+\frac{\partial\psi_t^\alpha}{\partial u^s}\right)du^s\wedge du^t=0.$$

Мындан

$$\sum_{s<t}(\frac{\partial\psi_t^\alpha}{\partial z^\beta}\psi_s^\beta+\frac{\partial\psi_t^\alpha}{\partial u^s}-\frac{\partial\psi_s^\alpha}{\partial z^\beta}\psi_t^\beta-\frac{\partial\psi_s^\alpha}{\partial u^t})du^s\wedge du^t=0.$$

Демек,

$$\frac{\partial\psi_s^\alpha}{\partial z^\beta}\psi_t^\beta+\frac{\partial\psi_s^\alpha}{\partial u^t}=\frac{\partial\psi_t^\alpha}{\partial z^\beta}\psi_s^\beta+\frac{\partial\psi_t^\alpha}{\partial u^s}. \qquad 9)$$

Эгерде ушул шарттар аткарылса, анда (7) система толук интегралдануучу болот.

Эскертүү 2. 3. Фробениустун теоремасын дагы башкача айтуу мүмкүн. X_n - жылма көптүспөлдүүлүк болсун. $G\subset X_n$ ачык көптүгүндө $p-$ ченемдүү Δ_p бөлүштүрүүсү жана X жылма вектордук талаасы берилген болсун. Эгерде $\forall x\in G$: $X|_x\in\Delta_p(x)$ болсо, анда X вектордук талаасы Δ_p ***бөлүштүрүүсүнө таандык*** деп айтышат.

Эгерде Δ_p бөлүштүрүүсүнө таандык болушкан каалаган эки X,Y жылма вектордук талаалар үчүн Линин кашаасы да Δ_p бөлүштүрүүсүнө таандык болсо, б.а. $(X,Y\in\Delta_p)\Rightarrow[X,Y]\in\Delta_p$ болсо, анда Δ_p бөлүштүрүүсү ***инволютивдик бөлүштүрүү*** деп аталат.

$X_s(s,t,\kappa = 1, 2,..., p)$ – G көптүгүндө берилген жылма вектордук талаалар болушсун жана ар бир $x \in G$ чекитинде $X_s|_x$ векторлору $\Delta_p(x)$ камтылуучу мейкиндигинин базисин түзүшсүн дейли. Демек, бардык $X_s \in \Delta_p$.

Эгерде Δ_p бөлүштүрүүсү инволютивдик болсо, анда инволютивдүүлүк шарты X_s вектордук талаалары үчүн да аткарылат: $[X_s, X_t] \in \Delta_p$, б.а. $[X_s, X_t] = C_{st}^k X_k$, мында C_{st}^k – G көптүгүндө аныкталган жылма функциялар.

X, Y – Δ_p бөлүштүрүүсүнө таандык болушкан жана G көптүгүндө аныкталган каалагандай жылма вектордук талаалар болсун.

Эгерде $X_s = \xi_s^i \partial_i$, $X = \lambda^s X_s$, $Y = \mu^s X_s$ болсо, анда $X = \lambda^s \xi_s^i \partial i$, $Y = \mu^s \xi_s^i \partial i$ болот. Демек,

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= \left\{ \lambda^s \xi_s^i \partial_i \left(\mu^t \xi_t^i \right) - \mu^s \xi_s^i \partial_i \left(\lambda^t \xi_t^i \right) \right\} \partial_j = \\
&= \left\{ \lambda^s \xi_s^i \xi_t^j \partial_i \mu^t + \lambda^s \xi_s^i \mu^t \partial_i \xi_t^j - \mu^s \xi_s^i \xi_t^j \partial_i \lambda^t - \mu^s \xi_s^i \lambda^t \partial_i \xi_t^j \right\} \partial_j = \\
&= \lambda^s \mu^t \left(\xi_s^i \partial_i \xi_t^j - \xi_t^i \partial_i \xi_s^j \right) \partial_j + \left(\lambda^s \xi_s^i \partial_i \mu^t - \mu^s \xi_s^i \partial_i \lambda^t \right) \xi_t^j \partial_j = \\
&= \lambda^s \mu^t [X_s, X_t] + h^t X_t .
\end{aligned}$$

Анда

$$[X,Y] = \lambda^s \mu^t C_{st}^k X_k + h^t X_t = \left(\lambda^s \mu^t C_{st}^k + h^k \right) X_k \in \Delta_p .$$

Демек, Δ_p бөлүштүрүүсү инволютивдик болушу үчүн бул бөлүштүрүүгө таандык болушкан кандайдыр бир сызыктуу көз каранды эмес p жылма X_s вектордук талаалары үчүн

$[X_s, X_t] \in \Delta_p$ $(s,t = 1, 2, ..., p)$ шарты орун алышы зарыл жана жетиштүү.

Теорема 2. 3. Δ_p бөлүштүрүүсү инволютивдик болушу үчүн анын толук интегралдануучу болушу зарыл жана жетиштүү (бул Фробениустун теоремасынын дагы бир түрдө айтылышы).

Далилдөө. $G \subset X_n$ ачык көптүгүндө Δ_p жылма көптүспөлдүүлүгү берилген болсун. Эгерде $x \in G$ болсо, анда бул чекиттин кандайдыр бир чек – белинде Δ_p бөлүштүрүүсүн $n - p$ сандагы сызыктуу көз каранды эмес Пфаффтын теңдемелеринин системасы $\theta^\alpha = 0$ менен аныктоого болот (мында $\theta^\alpha = a_i^\alpha dx^i$).

Бул системаны ага эквиваленттүү болгон

$$dx^\alpha - \psi_t^\alpha dx^t = 0 \qquad (10)$$

система менен алмаштырууга болот $(s,t,\kappa = 1, 2, ..., p$, $\alpha, \beta, \gamma = p+1, ..., n$).

(dx^i) вектору Δ_p бөлүштүрүүсүнө таандык болот, эгерде анын dx^i координаталары (10) системаны канааттандырышса. Демек, $X_s = (\delta_s^t, \psi_s^\alpha) \in \Delta_p$. Бул вектордук талаалар жылма (себеби ψ_t^α функциялары жылма функциялар) жана сызыктуу көз каранды эмес. Эгерде $X_s = \xi_s^i \partial_i$ болсо, анда Δ_p бөлүштүрүүсү инволютивдик болушу үчүн төмөндөгү барабардыктардын аткарылышы зарыл жана жетиштүү:

$$\xi_s^i \frac{\partial \xi_t^j}{\partial x^i} - \xi_t^i \frac{\partial \xi_s^j}{\partial x^i} = C_{st}^k \xi_k^j .$$

X_s вектордук талааларынын координаталарын эске алуу менен төмөндөгүнү алабыз:

$$\delta_s^k \frac{\partial \xi_t^j}{\partial x^k} + \psi_s^\beta \frac{\partial \xi_t^j}{\partial x^\beta} - \delta_t^k \frac{\partial \xi_s^j}{\partial x^k} - \psi_t^\beta \frac{\partial \xi_s^j}{\partial x^\beta} = C_{st}^k \xi_k^j ,\ (j = 1,2,...,n)$$

же

$$\frac{\partial \xi_t^j}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi_t^j}{\partial x^\beta}\psi_s^\beta - \frac{\partial \xi_s^j}{\partial x^t} - \frac{\partial \xi_s^j}{\partial x^\beta}\psi_t^\beta = C_{st}^k \xi_k^j . \qquad (11)$$

Эгерде $j = \ell \leq p$ деп алсак, анда $C_{st}^k \delta_k^\ell = 0$ болот. Демек, бардык $C_{st}^\ell = 0$. Ошондуктан (11) система төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$\frac{\partial \psi_t^\alpha}{\partial x^s} + \frac{\partial \psi_t^\alpha}{\partial x^\beta}\psi_s^\beta = \frac{\partial \psi_s^\alpha}{\partial x^t} + \frac{\partial \psi_s^\alpha}{\partial x^\beta}\psi_t^\beta . \qquad (12)$$

бул болсо жогорудагы (9) система менен дал келет. Ошентип, Δ_p бөлүштүрүүсү инволютивдик болушу үчүн ар бир $x \in G$ чекитинде (12) шарттын аткарылышы (б.а. бул бөлүштүрүү менен ассоцирленген), θ^α 1- формалардын системасы толук интегралдануучу болушу зарыл жана жетиштүү.

§15. Евклиддик мейкиндиктин түзүлүшүнүн теңдемелери

E_n евклиддик мейкиндигинде ортонормаланган $\Re_o = (0, \vec{\Im}_1, ..., \vec{\Im}_n)$ реперин алабыз да, "баштапкы" репер деп атап коебуз. Каалаган башка $\Re_x = (x, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ репери өзүнүн башталышынын $\vec{x} = x^i \vec{\Im}_i$ радиус – вектору жана $\vec{e}_i = \xi_i^k \vec{\Im}_k$ координаталык векторлору менен аныкталат.

Эгерде $\Re_x$ репери ортонормаланган репер болсун деп шарт койсок, анда $\vec{e}_i$ векторлору

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij} \tag{1}$$

шартты канааттандырышы керек (δ_{ij} – Кронекердин символу). Демек, $\left\| \xi_i^k \right\|$ матрицасы ортогоналдык матрица болушу керек. Ошондуктан, бул матрицанын n^2 сандагы ξ_i^k элементтери

$$n + C_n^2 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

сандагы (1) теңдемелерди канааттандырышат. Демек, ξ_i^k элементтеринин ичинен көз каранды эместери

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

болот. Алар n сандагы x^i өзгөрмөлөрү менен бирдикте $r = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ сандагы параметрлерди түзүшөт.

Демек, E_n мейкиндигиндеги ортонормаланган $\Re_x$ репери ушундай r сандагы параметрлерден көз каранды болот.

Бирок, реперлердин иреттелген $(\Re_o, \Re_x)$ түгөйүнүн берилиши менен $f(\Re_o) = \Re_x$ боло тургандай f кыймылы бир маанилүү аныкталат [2]. Ошондуктан E_n мейкиндигинин кыймылдарынын группасы $r = \frac{n(n+1)}{2}$ параметрден көз каранды болот деп айта алабыз. Бул параметрлердин маанилеринин ар бир системасы өзүнүн $\Re_x$ ортонормаланган реперин аныктайт (демек, E_n мейкиндигинин тиешелүү f кыймылын аныктайт).

$u^a (a = 1, 2, ..., r)$ аркылуу каралып жаткан параметрлердин $\Re_x = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ реперин аныктай турган маанилерин белгилеп коелу. Бул параметрлерге жетишээрлик кичине du^a өсүндүлөрдү берели, б.а. көрсөтүлгөн параметрлердин жаңы $u^a + du^a$ маанилерин карайлы. Параметрлердин бул жаңы маанилери ортонормаланган жаңы $\Re_{x'} = (x', \vec{e}'_1, ..., \vec{e}'_n)$ реперди аныкташат (мында $\vec{x}' = \vec{x} - \Delta\vec{x}$, $\vec{e}_{i'} = \vec{e}_i + \Delta\vec{e}_i$). $d\vec{x}$ жана $d\vec{e}_i$ аркылуу тиешелеш түрдө $\Delta\vec{x}$ жана $\Delta\vec{e}_i$ жетишээрлик кичине өсүндүлөрүнүн башкы бөлүгүн белгилейбиз. $d\vec{x}$ жана $d\vec{e}_i$ векторлорун $\Re_x$ реперинин координаталык векторлору аркылуу ажыраталы:

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i,\; d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \;\; (i, j, \kappa = 1, 2, \ldots n) \qquad (2)$$

Мындагы ω^i, ω_i^j – *1*- формалар. Алар u^a параметрлеринин du^a дифференциалдары аркылуу сызыктуу туюнтула тургандыгын кийинчерээк көрсөтөбүз.

Бул *1*- формалар: ω^i, ω_i^j – $\Re_x$ реперинин кыймылынын компоненталары [9] деп аталышат. Аларды каалагандай тандап алууга болбойт

Биз $\Re_x$ сыяктуу ортонормаланган реперлердин тобуна ээ болдук. Демек, (1) барабардыктар u^a параметрлеринин каалагандай маанилеринде орун алышат, б.а. алар теңдештиктер болушат. Ошондуктан аларды дифференцирлөөгө болот:

$$(d\vec{e}_i)\vec{e}_j + \vec{e}_i(d\vec{e}_j) = 0,$$

(2) барабардыктарды пайдаланып, төмөндөгүнү алабыз:

$$\omega_i^k \vec{e}_k \vec{e}_j + \omega_j^k \vec{e}_k \vec{e}_i = 0 \qquad \text{же} \qquad \omega_i^k \delta_{kj} + \omega_j^k \delta_{ki} = 0.$$

Мындан $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$ б.а. $(n \times n)$-тартиптеги $\omega = (\omega_i^j)$ матрицасы кососимметриялуу экендиги келип чыгат. Бул матрицанын башкы диагоналынын бардык элементтери нөлгө барабар болот:

$$\omega_i^i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

$\Re_x$ реперинин кыймылынын компоненталары мындан башка да шарттарды канааттандырыша тургандыгын көрөбүз. Ал шарттарды E_n мейкиндигинин структурасынын теңдемелери деп атап коюшат. Ушул шарттарды табалы. Ал үчүн (2) системаны ($\Re_o$ реперин пайдаланып) төмөндөгүдөй жазып алабыз:

$$d\left(x^k \vec{I}_k\right) = \omega^i \xi_i^k \vec{I}_k,\ d\left(\xi_i^k \vec{I}_k\right) = \omega_i^j \xi_j^k \vec{I}_k.$$

Демек, (2) система төмөндөгүдөй системаѓа эквиваленттүү болот:

$$dx^k = \omega^i \xi_i^k,\ d\xi_i^k = \omega_i^j \xi_j^k \tag{3}$$

Мындан

$$\omega^i = \tilde{\xi}_k^i dx^k,\ \omega_i^j = \tilde{\xi}_k^j d\xi_i^k \tag{4}$$

келип чыгат.

Демек, ω^i, ω_i^j формалары $\Re_x$ реперинин башталышы болгон x чекитинин жана $\vec{e}_i$ векторлорунун координаталары жана ал координаталардын дифференциалдары аркылуу ушундайча туюнтулат экен.

$\xi_i^k \tilde{\xi}_k^j = \delta_i^j$ болгондуктан,

$$\left(d\xi_i^k\right) = \tilde{\xi}_k^j + \xi_i^k d\tilde{\xi}_k^j = 0 \tag{5}$$

болот. (4) формуладан төмөндөгүнү алабыз:

$$D\omega^i = d\tilde{\xi}_k^i \wedge dx^k. \tag{6}$$

(3), (4) дөн $\omega_i^j = -\xi_i^k d\tilde{\xi}_k^j$ келип чыгат.

Мындан

$$d\tilde{\xi}_k^i = -\tilde{\xi}_k^t \omega_t^i \tag{7}$$

Эми (6) барабардыкты төмөндөгүдөй көрүнүштө жазууга болот:

$$D\omega^i = -\tilde{\xi}_k^t \omega_t^i \wedge dx^k \text{ же } D\omega^i = \tilde{\xi}_k^j , dx^k \wedge \omega_j^i .$$

(4) формуланын биринчи барабардыгын пайдаланып, төмөндөгүнү алабыз:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i . \tag{8}$$

(8) барабардыктан Фробениустун теоремасы боюнча "ω^i формаларынын системасы толук интегралданууччу болот" деген жыйынтыкка келебиз.

(4) формуланын экинчи барабардыгынан $D\omega_i^j = d\tilde{\xi}_k^j \wedge d\xi_i^k$ алабыз. Мындан, (7) барабардыкты пайдаланып,

$$D\omega_i^l = -\tilde{\xi}_k^t \omega_t^j \wedge d\xi_i^k = \tilde{\xi}_k^t d\xi_i^k \wedge \omega_t^j$$

барабардыгына ээ болобуз. Мындан, (4) формуланын экинчи теңдемесин эске алып,

$$D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \tag{9}$$

барабардыгын алабыз. (9) формуладан Фробениустун теоремасынын негизинде төмөндөгүдөй жыйынтыкка келебиз: ω_i^j формаларынын системасы толук интегралдануучу болот экен.

Ошентип, төмөндөгүдөй теңдемелерди алдык:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i ,\; D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i ,\; \omega_i^j + \omega_j^i = 0 , \\ (i, j, \text{к} = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Бул теңдемелер E_n евклиддик мейкиндигинин структурасынын теңдемелери деп аталышат. (10) теңдемелердин негизинде (3) система (демек, (2) система дагы) толук интегралдануучу болот. Бул системада белгисиздер болуп $x^{\kappa}, \xi_i^{\kappa}$, б.а. $\vec{x}, \vec{e}_i$ векторлорунун координаталары эсептелишет (булар болсо $\Re_x$ реперин аныкташат).

Эгерде баштапкы шарттарды тиешелүү $(\Re_x)_o$ репери ортонормаланган репер боло тургандай тандап алсак, анда ушул баштапкы шарттар (3) системанын ушундай $\vec{x}, \vec{e}_i$ чечимдерин аныкташат. $\Re_x = (x, \vec{e}_i)$ репери да ортонормаланган репер болот. Ушундай экендигин көрсөтөлү. Адегенде ω^i, ω_i^j формалары кыймылсыз $\Re_o$ реперин тандап алуудан көз каранды эмес (алар $\Re_{x'}$ реперинин $\Re_x$ реперине карата жайланыш абалынан гана көз каранды) экендигин көрөлү. Чындыгында, эгерде $\Re_o = (x, \vec{I}_{\kappa})$ реперинен $\Re_o = (0', \vec{I}_{\kappa})$ реперине өтсөк (координаталар башталышын которуу), анда $\overline{0'x} = \overline{0'0} + \overline{0x}$ болот. Бул барабардыкты дифференцирлөө менен $d\overline{0'x} = d\overline{0x} = \omega^i \vec{e}_i$ алабыз. Эгерде $\Re_o = (0, \vec{I}_{\kappa})$ реперинен $\Re'_o = (0, \vec{I}'_{\kappa})$ реперине өтсөк (координаталык векторлорду алмаштыруу), анда ар бир вектордун координаталары өзгөрөт, бирок $\vec{x}, \vec{e}_i$ векторлорунун өздөрү өзгөрбөй кала беришет. Демек, (2) теңдемелердеги $d\vec{x}, \vec{e}_i, d\vec{e}_i$ векторлорунун бири дагы (кыймылсыз $\Re_o$ реперин тандап алуудан) өзгөрүшпөйт. Ошондуктан, ω^i, ω_i^j компоненталары да өзгөрүүсүз калышат.

Эми (2) теңдемелер системасы үчүн баштапкы шарттар тиешелүү $\Re_{x_o} = \left(x_o, (\vec{e}_i)_o\right)$ репери ортонормаланган репер боло тургандай тандалып алынган болсун дейли. Бул реперге жетишээрлик жакын жайланышкан $\Re_x = (x, \vec{e}_i)$ реперин карайбыз. Мындагы

$$\vec{x} = \vec{x}_o + d\vec{x},\ \vec{e}_i = (\vec{e}_i)_o + \omega_i^j \left(\vec{e}_j\right)_o.$$

Төмөндөгүнү табабыз:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \left((\vec{e}_i)_o + \omega_i^k (\vec{e}_k)_o\right) \cdot \left(\left(\vec{e}_j\right)_o + \omega_j^t (\vec{e}_t)_o\right) =$$

$$= (\vec{e}_i)_0 \left(\vec{e}_j\right)_o + \omega_i^k (\vec{e}_k)_o \left(\vec{e}_j\right)_o + \omega_j^t (\vec{e}_k)_o (\vec{e}_i)_o + \omega_i^k \omega_j^k (\vec{e}_k)_o \cdot (\vec{e}_t).$$

$\Re_{x_o}$ - ортонормаланган репер болгондуктан $\left(\vec{e}_g\right)_o \cdot (\vec{e}_h)_o = \delta_{gh}$ болот. Ошондуктан

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij} + \omega_i^k \delta_{kj} + \omega_j^t \delta_{ti} + \omega_i^k \omega_j^t \delta_{kt} = \delta_{ij} + \omega_i^j + \omega_j^i + \sum_k \omega_i^k \omega_j^t.$$

Структуранын теңдемелеринин негизинде $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$ жана (интегралдоодо биз биринчи тартиптеги гана жетишээрлик кичине чоңдуктарды эске алгандыгыбыз үчүн) $\vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij}$ болот. Демек, $\Re_x$ репери ортонормаланган репер.

$\Re_x$ реперин баштапкы репер үчүн эсептеп, каалаган бул реперге жетишээрлик жакын жайланышкан $\Re_{x'}$ репери ортонормаланган репер боло тургандыгын жогорудагыга окшош эле көрсөтүүгө болот. Ошентип, (2) системанын чечимдеринин жардамында аныкталган реперлердин $(\Re_x)$ тобу ортонормаланган реперлерден турат экен.

Эскертүү 2.4. Жогоруда белгиленгендей ω^i 1-формаларынын системасы толук интегралданууучу. (4) системанын биринчи теңдемесинен төмөндөгүдөй жыйынтыкка келебиз: $\omega^i = 0$ теңдемелер системасынын биринчи интегралдары болуп x^k лар, б.а. $\Re_x$ реперинин башталышынын координаталары эсептелет. Эгерде биз

$$x^{\kappa} = x^{\kappa}\left(t^1, \ldots, t^p\right) \tag{11}$$

деп алсак (мында барабардыктын оң жагындагылар кандайдыр бир $\Omega \subset R^p$ аймагында аныкталышкан жана ранг$\left\|\frac{\partial x^k}{\partial t^s}\right\| = p$ боло тургандай дифференцирленүүчү функциялар), анда бул барабардыктарды (3) формуланын биринчи теңдемесине ордуна коюп, ω^i 1- формалары көз каранды эмес p сандагы dt^s дифференциалдарынан гана көз каранды боло тургандыгын көрөбүз. (3) системаны интегралдоодон кийин чокулары (11) теңдемелер менен аныкталган p ченемдүү бетте жатышкан реперлердин $(\Re_x)$ системасына ээ болобуз.

Тескерисинче, эгерде (3) теңдемелер системасындагы ω^i формалары p сандагы көз каранды эмес дифференциалдардан гана көз каранды болушса жана (10) барабардыктар аткарылса, анда (3) система ($(\Re_x)_o$ репери берилген учурда) чокулары кандайдыр бир p – ченемдүү бетти жыш толтура тургандай реперлердин $\{\Re_x\}$ системасын аныктайт. (2) система ушул эле бетти эмес, бул беттен каалагандай кыймылдардын жардамында алына турган (б.а. бул бетке конгруэнттүү болушкан) беттердин бардыгын аныктайт [9].

§16. Аффиндик жана проективдүү мейкиндиктердин түзүлүшүнүн теңдемелери

A_n аффиндик мейкиндигинде $\Re_o = \{0, \vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ ("баштап-кы" репер) аффиндик реперин алалы. Каалаган башка $\Re_x = (x, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ аффиндик репери $O\vec{x} = \vec{x} = x^i \vec{a}_i$ радиус–век-тору жана $\vec{e}_i = \xi_i^k \vec{a}_k$ координаталык векторлору менен аныкталат. Демек, A_n мейкиндигиндеги $\Re_x$ репери $r = n + n^2 = n(n+1)$ сандагы x^i, ξ_i^k параметрлеринен көз каранды болот.

Реперлердин иреттелген $(\Re_o, \Re_x)$ түгөйү $f(\Re_o) = \Re_x$ боло тургандай f аффиндик өзгөртүп түзүүсүн бир маанилүү аныктайт [2]. Ошентип, A_n мейкиндигинин аффиндик өзгөртүп түзүүлөрүнүн группасы $r = n(n+1)$ параметрден көз каранды болот экен.

$\Re_x = (x, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ реперин аныкталган параметрлердин маанилерин $u^a(\ a = 1, 2, ..., r)$ аркылуу белгилеп коелу. Бул параметрлерге чексиз кичине өсүндүлөрдү du^a берип, параметрлердин жаңы $u^a + du^a$ маанилерине ээ болобуз. Бул маанилер жаңы $\Re_{x'} = (x', \vec{e}'_1, ..., \vec{e}'_n)$ аффиндик реперин аныкташат. Мындагы $\vec{x}' = \vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{e}'_i = \vec{e}_i + \Delta\vec{e}_i$, $\Delta\vec{x}$, $\Delta\vec{e}_i$ чексиз кичине өсүндүлөрүнүн $d\vec{x}$, $d\vec{e}_i$ башкы бөлүктөрү үчүн төмөндөгүдөй теңдемелерди алабыз:

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \qquad (1)$$

Бул теңдемелердеги $\vec{e}_i$ – жөн гана сызыктуу көз каранды эмес векторлор (алардын бирдик векторлор болушу жана өз ара перпендикуляр болуштары шарт эмес). Биз §15 тегидей эле (3) жана (4) теңдемелерди алабыз. Бирок $\left\| \xi_i^k \right\|$ матрицасы жөн эле кубулбаган матрица болот (§15 тегидей анын ортогоналдык матрица болушу шарт эмес). (4) системаны сырттан дифференцирлеп, §15 теги (10) формуланын биринчи эки барабардыгын алабыз:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \ D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \qquad (2)$$

Бул барабардыктар A_n мейкиндигинин структурасынын теңдемелери деп аталышат.

Тескерисинче, эгерде ω^i, ω_j^i 1- формалары (2) теңдемелерди канааттандырышса, анда (1) система толук интегралдануучу болот жана баштапкы репери каалагандай тандалып алынган $(\Re_x)_o$ аффиндик репер менен дал келе тургандай аффиндик реперлердин жалгыз гана системасын аныктайт.

Эгерде ω^i формалары p сандагы көз каранды эмес дифференциалдардан гана көз каранды болушса жана (2) теңдемелерди канааттандырышса, анда ($(\Re_x)_o$ баштапкы репери берилген учурда) чокулары A_n мейкиндигинин кандайдыр бир $p-$ ченемдүү бетин жыш толтура тургандай аффиндик реперлердин $\{\Re_x\}$ системасына ээ болобуз. (1) система ушул гана бетти эмес, ага аффиндик – эквиваленттүү болгон беттердин бардыгын аныктайт.

Эми $\hat{A}_n$ эквиаффиндик мейкиндигин карайлы. Бул мейкиндиктеги $\Re_x$ репери $det\left\|\xi_i^k\right\| = 1$, б.а.

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = 1 \tag{3}$$

шартын канааттандырышы керек. Демек, $\hat{A}_n$ мейкиндигинин эквиаффиндик өзгөртүп түзүүлөрүнүн группасы $r = n(n+1) - 1$ параметрден көз каранды болот экен. (3) теңдештикти дифференцирлеп (аныктагыч "мамычасы боюнча" дифференцирлене тургандыгын билебиз), төмөндөгүнү алабыз:

$$(\omega_1^\kappa \vec{e}_\kappa, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) + (\vec{e}_1, \omega_2^\kappa \vec{e}_\kappa, \dots, \vec{e}_n) + \dots + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \omega_n^k \vec{e}_k) = 0.$$

Эки мамычасы бирдей болгон аныктагыч нөлгө барабар боло тургандыгын жана (3) барабардыкты эске алып:

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \dots + \omega_n^n = 0 \tag{4}$$

барабардыгына ээ болобуз.

(2) жана (4) теңдемелер $\hat{A}_n$ мейкиндигинин структурасынын теңдемелери деп аталышат.

Эми P_n проективдүү - мейкиндигин карайбыз. Бул мейкиндикте $\Re_o = (M_o, M_1, ..., M_n, E_o)$ реперин алалы жана аны “баштапкы” репер деп атап коебуз. P_n мейкиндиги $(n+1)$ – ченемдүү чыныгы вектордук V мейкиндиги тарабынан жаратыла тургандыгын билебиз [2].

V мейкиндигинин $B_o = (\vec{M}_o, \vec{M}_1, ..., \vec{M}_n)$ базиси (гомотетиялуулукка чейинки тактыкта аныкталган) жашап, $\vec{M}_\alpha$ вектору $M_\alpha (\alpha = 0, ..., n)$ чекитин, $\vec{E}_o = \vec{M}_o + ... + \vec{M}_n$ вектору E_o чекитин жаратышат. (E_o – $\Re_o$ реперинин бирдик чекити). P_n мейкиндигинин каалаган $\Re$ реперин V мейкиндигинин $B = (\vec{A}_o, \vec{A}_1, ..., \vec{A}_n)$ базиси менен аныктоого болот. Мындагы $\vec{A}_\alpha$ векторлору $\Re$ реперинин A_α чокуларын жаратышат, ал эми $\vec{E} = \vec{A}_o + ... + \vec{A}_n$ вектору $\Re$ реперинин бирдик чекитин жаратат. Бул учурда $\Re$ реперин $\Re = (\vec{A}_o, \vec{A}_1, ..., \vec{A}_n)$ көрүнүшүндө жазышат.

$\Re_o, \Re$ проективдүү реперлеринин иреттелген $(\Re_o, \Re)$ түгөйү $\Re_o$ репери $\Re$ реперине өтө тургандай P мейкиндигинин проективдүү өзгөртүп түзүүсүн аныктайт.

B базисинин векторлорун B_o базисинин векторлору аркылуу ажыраталы:

$$\vec{A}_\beta = x_\beta^\alpha \vec{M}_\alpha \;\; (\alpha, \beta = 0, 1, 2..., n) \tag{5}$$

$\vec{A}_\beta$ векторлору сызыктуу көз каранды эмес болгондуктан, $det\left\|x^\alpha_\beta\right\| \neq 0$ болот. $\left\|x^\alpha_\beta\right\|$ матрицасы $(n+1)^2$ сандагы элементтерди кармап турат. B базисинин бардык векторлорун бир эле $\lambda \neq 0$ санына көбөйтүү менен бул базиске гомотетиялуу болгон B_1 базисине ээ болобуз жана B_1 базиси деле $\mathfrak{R}$ реперинин өзүн аныктайт. Ошондуктан, $\mathfrak{R}$ реперин аныктоо үчүн $\left\|x^\alpha_\beta\right\|$ матрицасынын элементтерин жалпы көбөйтүүчүгө чейинки тактыкта билүү гана жетиштүү. Бул көбөйтүүчүнү $det\left\|x^\alpha_\beta\right\| = 1$ боло тургандай тандап алуу мүмкүн. Демек, $\mathfrak{R}$ репери $(n+1)^2 - 1 = n(n+2)$ сандагы параметрлерден көз каранды болот экен. Бул болсо P_n мейкиндигинин проективдүү өзгөртүп түзүүлөрүнүн группасы $r = n(n+2)$ параметрлерден көз каранды дегенди билдирет. $\mathfrak{R}$ реперин аныктай турган параметрлердин маанилерин u^a аркылуу белгилеп коелу. Бул параметрлерге чексиз кичине du^a өсүндүлөрүн берип, параметрлердин жаңы $u^a + du^a$ маанилерине ээ болобуз. Алар $\mathfrak{R}' = \left(\vec{A}'_0, \vec{A}'_1, \dots, \vec{A}'_n\right)$ жаңы проективдүү реперин аныкташат. Мында $\vec{A}'_\alpha = \vec{A}_\alpha + \Delta\vec{A}_\alpha$.

$d\vec{A}_\alpha$ аркылуу $\Delta\vec{A}_\alpha$ өсүндүсүнүн башкы бөлүгүн белгилейли жана $d\vec{A}_\alpha$ векторун $\left(\vec{A}_\alpha\right)$ базиси боюнча ажыраталы.

$$d\vec{A}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \vec{A}_\beta. \qquad (6)$$

Мындагы ω_α^β – *1*- формалар. Ушуларды табалы. Ал үчүн (5) формуланы пайдаланып, (6) барабардыкты $d\left(x_\alpha^\gamma \vec{M}_\gamma\right) = \omega_\alpha^\beta x_\beta^\gamma \vec{M}_\gamma$ көрүнүшүндө, же ($\vec{M}_\gamma$ векторлору турактуу болгондуктан) $\left(dx_\alpha^\gamma\right)\vec{M}_\gamma = x_\beta^\gamma \omega_\alpha^\beta \vec{M}_\gamma$ көрүнүшүндө жазып алабыз. Мындан $x_\beta^\gamma \omega_\alpha^\beta = dx_\alpha^\gamma$ келип чыгат. Демек,

$$\omega_\alpha^\beta = \tilde{x}_\gamma^\beta dx_\alpha^\gamma, \qquad (7)$$

мында

$$\tilde{x}_\gamma^\beta x_\alpha^\gamma = \delta_\alpha^\beta. \qquad (8)$$

(7) барабардыкты сырттан дифференцирлейбиз:

$$D\omega_\alpha^\beta = d\tilde{x}_\gamma^\beta \wedge dx_\alpha^\gamma. \qquad (9)$$

(7) формуладан $dx_\alpha^\gamma = x_\delta^\gamma \omega_\alpha^\delta$ экендигин көрөбүз жана аны (9) формулага ордуна коюп, төмөндөгүнү алабыз:

$$D\omega_\alpha^\beta = x_\delta^\gamma d\tilde{x}_\gamma^\beta \wedge \omega_\alpha^\delta \qquad (10)$$

(8) формуладан $x_\alpha^\gamma d\tilde{x}_\gamma^\beta + \tilde{x}_\alpha^\beta dx_\alpha^\gamma = 0$ келип чыгат, ал эми (7) нин негизинде $x_\beta^\gamma d\tilde{x}_\gamma^\beta = -\omega_\alpha^\beta$ болот. Ошондуктан (10) барабардык төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$D\omega_\alpha^\beta = -\omega_\delta^\beta \wedge \omega_\alpha^\delta$$

же

$$D\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\delta \wedge \omega_\delta^\beta. \qquad (11)$$

$det\left\| x_{\beta}^{\alpha} \right\| = 1$ шартын

$$\left(\vec{A}_o, \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n\right) = 1 \qquad (12)$$

көрүнүшүндө жазып алууга болот (барабардыктын сол жагында $\vec{A}_o, \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n$ векторлорунун координаталарынан түзүлгөн аныктагыч белгиленген). (12) теңдештикти дифференцирлеп, төмөндөгүнү алабыз:

$$\left(\omega_o^o \vec{A}_o, \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n\right) + \left(\vec{A}_o, \omega_1^1 \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n\right) + \ldots + \left(\vec{A}_o, \vec{A}_1, \ldots, \omega_n^n \vec{A}_n\right) = 0.$$

Мындан ((12) барабардыкты эске алуу менен)

$$\omega_o^o + \omega_1^1 + \ldots + \omega_n^n = 0 \qquad (13)$$

барабардыгына ээ болобуз.

(11) жана (13) теңдемелер P_n мейкиндигинин структурасынын теңдемелери болушат.

Эгерде ω_{α}^{β} 1- формулаларынын системасы (11), (13) теңдемелерди канааттандырса, анда (6) система толук интегралдануучу болот жана ал баштапкы репери каалагандай берилген репер менен дал келе тургандай проективдүү реперлердин жалгыз гана системасын аныктайт. $\alpha = 0$ болгон учурда (10) формуладан төмөндөгүнү алабыз:

$$D\omega_o^{\beta} = \omega_o^{\gamma} \wedge \omega_{\gamma}^{\beta} \qquad (\beta = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

булардын арасында төмөндөгүдөй барабардыктар да камтылган:

$$D\omega^i = \omega_o^o \wedge \omega^i + \omega^j \wedge \omega_j^i \ \left(i, j = 1, 2, \ldots, n\right).$$

Мындан, Фробениустун теоремасы боюнча 1-формалардын ω^i системасы толук интегралдануучу экендигин көрөбүз. (6) теңдемеден бардык $\omega^i = 0$ болгон учурда гана A_o чекити кыймылсыз боло тургандыгы келип чыгат.

Эгерде ω^i формалары p сандагы көз каранды эмес дифференциалдардан көз каранды болушса жана (11), (13) теңдемелерди канааттандырышса, анда ($(\Re)_o$ репери берилген учурда) A_o чекити P_n мейкиндигинин кандайдыр бир p ченемдүү бетин сызып чыгат. (6) система бул p ченемдүү бетти проективдүү өзгөртүп түзүүгө чейинки тактыкта аныктайт. Бул төмөндөгүдөн көрүнүп турат: V_p бети $\Re_1$ баштапкы реперинин берилиши менен аныкталат. Башка бир $\Re_2$ баштапкы реперин берүү менен V_p' чечимине ээ болобуз. $\Re_1$ репери $\Re_2$ реперине өтө тургандай проективдүү өзгөртүп түзүүдө V_p бети V_p' бетине өтөт.

III Глава. R^n МЕЙКИНДИГИНДЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ФОРМАЛАР

§17. R^3 мейкиндигиндеги дифференциалдык формалар

R^3 мейкиндигин карайлы жана анын $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$ чекиттерин алалы. P чекитин бекемдеп коелу, Q өзгөрүүчү чекит болсун. Анда $\overline{PQ}$ сыяктуу векторлордун көптүгү R^3 мейкиндигинин P чекитиндеги жаныма мейкиндиги болот жана аны R_P^3 аркылуу белгилеп алабыз.

$P(p_1, p_2, p_3) \equiv O(o,o,o)$ болгон учурда O чекитиндеги жаныма мейкиндикти R_o^3 көрүнүшүндө белгилейбиз, анын базиси төмөндөгүдөй болот:

$$\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1).$$

Аныктоо. R^3 мейкиндигинде ***вектордук талаа*** деп ар бир $P(p_1, p_2, p_3) \in R^3$ чекитине анык бир $\vec{\vartheta}(P) \in R_P^3$ векторду тиешелеш кое турган $\vartheta : R^3 \to R_P^3$ чагылтуусун атайбыз:

$$\forall P \in R^3 : \vec{\vartheta}(P) = a_1(P)\vec{e}_1 + a_2(P)\vec{e}_2 + a_3(P)\vec{e}_3.$$

Ошентип, төмөндөгүдөй үч функция аныкталды: $a_i : R^3 \to R_P^3 \,(i = 1,2,3)$.

Бул үч сандык функция ϑ вектордук талаасын мүнөздөшөт. Эгерде a_i функциялары дифференцирленүүчү болушса, анда ϑ вектордук талаасы ***дифференцирленүүчү вектордук талаа*** деп аталат.

Ар бир R_P^3 жаныма мейкиндиги үчүн анын түйүндөш вектордук мейкиндигин $\left(R_P^3\right)^*$ аныктай алабыз. $\left(R_P^3\right)^*$ - сызыктуу $\varphi : R_P^3 \to R$ чагылтуулардын көптүгү боло тургандыгын жогортодон билебиз. Бул мейкиндиктин базиси болуп $\{(dx_i)_P\}\ (i = 1,2,3)$ эсептелет. Мында x_i төмөндөгүдөй чагылтуу: $x_i : R^3 \to R$, б.а. ар бир чекитке өзүнүн i-координатасын тиешелеш кое турган чагылтуу. $\{(dx_i)_P\}\ (i = 1,2,3)$ көптүгү R_P^3 мейкиндигинин $\{(\vec{e}_i)_P\}$ базисине түйүндөш базис болуп эсептелет, себеби

$$(dx_i)_P\left(\vec{e}_j\right) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0, \textit{эгерде } i \neq j, \\ 1, \textit{эгерде } i = j. \end{cases}$$

Аныктоо. R^3 мейкиндигинде сызыктуу формалардын (же *1* - даражалуу сырткы формалардын) ***талаасы*** деп

$$\omega : R^3 \to \left(R_P^3\right)^*$$

чагылтуусун айтабыз:

$$\forall P \in R^3 : \omega(P) = a_1(P)(dx_1)_P + a_2(P)(dx_2)_P + a_3(P)(dx_3)_P$$

же $\omega = \sum_{i=1}^{3} a_i dx_i$, мында $a_i = a_i(P)$ – R^3 мейкиндигиндеги чыныгы функциялар. Эгерде бул функциялар дифференцирленүүчү болушса, анда ω – биринчи даражалуу дифференциалдык форма болуп эсептелет.

Эми $\Lambda^2\left(R_P^3\right)^*$ аркылуу төмөндөгүдөй кош сызыктуу формалардын көптүгүн белгилейли: $\varphi : R_P^3 \times R_P^3 \to R$, б.а. φ – ар бир өзгөрүлмөсү боюнча сызыктуу жана $\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2) = -\varphi(\vartheta_2, \vartheta_1)$ $\left((\vartheta_2, \vartheta_1) \in R_P^3 \times R_P^3\right)$ болсун. $\Lambda^2\left(R_P^3\right)^*$ көптүгү вектордук мейкиндик болот (өз алдыңарча текшергиле).

$$\forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in \left(R_P^3\right)^* : \varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Lambda^2\left(R_P^3\right)^*$$

$\varphi_1 \wedge \varphi_2$ элементин төмөндөгүдөй аныктайбыз:

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2(\vartheta_1, \vartheta_2) = det(\varphi_i(\vartheta_j)).$$

$(dx_i)_P \wedge (dx_j)_P \in \Lambda^2\left(R_P^3\right)^*$ элементин $(dx_i \wedge dx_j)_P$ көрүнүшүндө белгилейбиз. $\{(dx_i \wedge dx_j)_P,\ i < j\}$ көптүгү $\Lambda^2\left(R_P^3\right)^*$ мейкиндигинин базиси боло тургандыгын жеңил эле текшерүүгө болот (окурманга өз алдынча иш катары сунуштайбыз).

Анын үстүнө төмөндөгүдөй барабардыктар да орун алышат:

$$(dx_i \wedge dx_j)_P = -(dx_j \wedge dx_i)_P \ \ (i \neq j), \ \ (dx_i \wedge dx_i)_P = 0.$$

Аныктоо. R^3 мейкиндигинде ***экинчи даражалуу сырткы форма*** деп

$$\omega : \ R^3 \to \Lambda^2\left(R_P^3\right)^*$$

чагылтуусун айтабыз, б.а.

$$\forall P \in R^3 : \omega(P) = a_{12}(P)(dx_1 \wedge dx_2)_P + a_{13}(P)(dx_1 \wedge dx_3)_P + $$
$$+ a_{23}(P)(dx_2 \wedge dx_3)_P$$

же $\omega = \sum\limits_{i<j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j$, $i, j = 1,2,3$ мында $a_{ij} = a_{ij}(P)$ – R^3 мейкиндигиндеги чыныгы функциялар. Бул функциялар дифференцирленүүчү болушса, анда ω – ***экинчи даражалуу дифференциалдык форма*** деп аталат.

§18. R^n мейкиндигиндеги дифференциалдык формалар

Биз эми жогорудагы түшүнүктөрдү R^n мейкиндиги үчүн жалпылайбыз. R^n мейкиндигинин $P(p_1, p_2, ..., p_n)$ чекитин алалы. Бул чекиттеги R^n мейкиндигинин жаныма мейкиндигин R_P^n аркылуу белгилейбиз. Ушул мейкиндикке түйүндөш болгон вектордук мейкиндик $\left(R_P^n\right)^*$ көрүнүшүндө белгиленет.

$\Lambda^k\left(R_P^n\right)^*$ аркылуу $\varphi : \underbrace{R_P^n \times R_P^n \times ... \times R_P^n}_{k\ жолу} \to R$ сыяктуу чагылтуулардын көптүгүн белгилейбиз. Бул көптүк вектордук мейкиндик болот.

Берилген $\varphi_1 , \varphi_2 ,..., \varphi_k \in \left(R_P^n\right)^*$ үчүн $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k \left(R_P^n\right)^*$ элементин төмөндөгүдөй аныктайбыз.

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(\vartheta_1, \vartheta_2,\ldots,\vartheta_k) = det(\varphi_i(\vartheta_j)),\ i,\ j = 1,\ldots,k .$$

Бул барабардык аныктагычтын касиеттеринен келип чыгат жана $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$ – k- сызыктуу жана симметриялуу. Айрым учурда

$$\left(dx_{i_1}\right)_P \wedge \left(dx_{i_2}\right)_P \wedge \ldots \wedge \left(dx_{i_k}\right)_P \in \Lambda^k \left(R_P^n\right)^*,$$

$i_1, i_2,\ldots,i_k = 1,\ldots,n$. Бул элементти төмөндөгүдөй белгилөөнү шарт кылабыз.

$$\left(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\right)_P .$$

Теорема 3.1. Төмөндөгү көптүк

$$\left\{\left(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\right)_P,\ i_1, i_2,\ldots,i_k,\ i_j \in \{1,\ldots,n\}\right\} \qquad (1)$$

$\Lambda^k \left(R_P^n\right)^*$ мейкиндигинин базиси болот.

Далилдөө. (1) көптүгүнүн элементтери сызыктуу көз каранды эмес экендигин көрсөтөлү. Эгерде $\sum\limits_{i_1<i_2\ldots<i_k} a_{i_1,\, i_2 ,\, \ldots i_k}\ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = 0$ болсо, анда $\left(e_{j_1}, e_{j_2},\ldots,e_{j_k}\right)$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, $j_\ell \in \{1,2,\ldots,n\}$ үчүн төмөндөгүнү алабыз:

$$\sum_{i_1<\ldots<i_k} a_{i_1,\, i_2 ,\, \ldots i_k}\ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_k}\right) = a_{j_1, j_2,\ldots, j_k} = 0 .$$

Төмөндөгүдөй белгилөөнү киргизели:

$$f = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} a_{i_1,\, i_2,\, \ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\,. \qquad (2)$$

Эми биз, эгерде $f \in \Lambda^k\left(R_P^n\right)^*$ болсо, анда f (1) көптүктүн элементтеринин сызыктуу комбинациясы боло тургандыгын көрсөтөбүз. Ал үчүн төмөндөгүдөй $g \in \Lambda^k\left(R_P^n\right)^*$ элементин алалы:

$$g = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} f\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_r}\right) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$i_1, i_2, \ldots, i_k$ лардын бардык маанилери үчүн

$$g\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}\right) = f\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}\right)$$

болгондуктан $g = f$ экендиги келип чыгат.

$f\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}\right) = a_{i_1,\, i_2 \ldots, i_k}$ деп алсак, анда (2) барабардыкка ээ болобуз. Теорема далилденди.

Аныктоо. R^n мейкиндигиндеги k - ***даражалуу сырткы форма*** деп

$$\omega : R^n \to \Lambda^k\left(R_P^n\right)^*$$

чагылтуусун атайбыз.

$$\forall P(p_1, \ldots, p_n) \in R^n :$$

$$\omega(P) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k}(P)\left(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\right)_P,\ i_j \in \{1, \ldots, n\},$$

мында $a_{i_1 \ldots i_k} = a_{i_1 \ldots i_k}(P)$ – R^n мейкиндигиндеги чыныгы функциялар. Эгерде бул функциялар дифференцирленүүчү болушса, анда ω сырткы формасы ***дифференцирленүүчү*** k - ***форма*** деп аталат. $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ деп белгилеп алсак, мында

$i_1 < \ldots < i_k$, $i_j \in \{1,\ldots,n\}$, анда ω формасын төмөндөгүдөй көрүнүштө жазууга болот:

$$\omega = \sum_I a_I dx_I .$$

Дифференцирленүүчү 0 - форма деп дифференцирленүүчү $f : R^n \to R$ функциясын атоону шарт кылабыз.

1-мисал. R^4 мейкиндигинде сырткы формалардын төмөндөгүдөй типтерине ээ болобуз:

0- формалар R^4 мейкиндигиндеги дифференцирленүүчү функциялар;

1- формалар - $a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 + a_4 dx_4$;

2- формалар - $a_{12} dx_1 \wedge dx_2 + a_{13} dx_1 \wedge dx_3 + a_{14} dx_1 \wedge dx_4 +$
$+ a_{23} dx_2 \wedge dx_3 + a_{24} dx_2 \wedge dx_4 + a_{34} dx_3 \wedge dx_4$;

3- формалар - $a_{123} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + a_{124} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 +$
$+ a_{134} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + a_{234} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$;

4- формалар - $a_{1234} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$.

Мындан ары биз k- даражалуу дифференциалдык формаларды кароо менен чектелебиз жана аларды жөн эле k- формалар деп атайбыз.

R^n мейкиндигиндеги k - формалардын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдарды аныктайлы.

ω, φ эки k - формасын алалы:

$$\omega = \sum_I a_I dx_I , \ \varphi = \sum_I в_I dx_I .$$

Алардын суммасы төмөндөгүдөй аныкталат:

$$\omega + \varphi = \sum_I (a_I + в_I) dx_I .$$

Эми ω – k- форма (k – даражалуу), φ – s- форма (s – даражалуу) болсун дейли. Экөөнүн сырткы көбөйтүндүсү төмөндөгүдөй аныкталат:

$$\omega = \sum_I a_I dx_I ,\ I = (i_1, i_2, ..., i_k),\ \ i_1 < i_2 < ... < i_k \ ,$$

$$\varphi = \sum_J в_J dx_J ,\ \ J = (j_1, j_2 ...., j_s),\ \ j_1 < j_2 < .... < J_s ,$$

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{IJ} a_I в_J dx_I \wedge dx_J .$$

2-мисал. $\omega = x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3$ – R^3 мейкиндигиндеги 1- форма жана $\varphi = x_1dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3$ – R^3 мейкиндигиндеги 2- форма болсун. Анда $dx_i \wedge dx_i = 0$ жана $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \ \ (i \neq j)$ экендигин эске алсак, анда төмөндөгү 3- форманы алабыз:

$$\omega \wedge \varphi = x_2dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + x_3x_1dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 =$$
$$= (x_1x_3 - x_2)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Эскертүү 3.1. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ 1- формаларынын сырткы көбөйтүндүлөрү төмөндөгүдөй аныкталат:

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_k \ (\vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_k) = det(\varphi_i(\vartheta_j)).$$

Бул түздөн түз жогорудагы аныктоодон келип чыгат.

R^n мейкиндигиндеги дифференциалдык формалардын сырткы көбөйтүндүлөрү төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болушат:

Теорема 3.2. $\omega - k$ - форма, $\varphi - s$ - форма, ал эми $\theta - r$ - форма болсун. Анда

а) $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$;

б) $(\omega \wedge \varphi) = (-1)^{ks} (\varphi \wedge \omega)$;

в) $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$ (эгерде $r = s$ болсо).

Далилдөө. (а) жана (в) барабардыктары аныктоодон түздөн түз келип чыккандыктан, (б) касиетин далилдөөгө токтолобуз. Ал үчүн формаларды төмөндөгүдөй жазып алалы:

$$\omega = \sum_I a_I dx_I \, , \; I = (i_1, i_2, \ldots, i_k), \;\; i_1 < i_2 < \ldots < i_k \; ,$$

$$\varphi = \sum_J \text{в}_J dx_J , \quad J = (j_1, j_2 \ldots, j_s), \;\; j_1 < j_2 < \ldots . < J_s .$$

Анда

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{IJ} a_I \text{в}_J dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s} =$$

$$= \sum_{IJ} \text{в}_J a_I (-1) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{i_k} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s} =$$

$$= \sum_{IJ} \text{в}_J a_I (-1)^k dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s} .$$

J көптүгүнүн s даана элементи болгондуктан, жогорудагыга окшош эле төмөндөгүнү алабыз:

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{JI} \text{в}_J a_I (-1)^{ks} dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_s} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = (-1)^{ks} \varphi \wedge$$

Эскертүү 3.2. $dx_i \wedge dx_j = 0$ болгону менен каалагандай эле ω формасы үчүн $\omega \wedge \omega = 0$ барабардыгы орун ала бербейт.

Мисал үчүн, эгерде $\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 dx_3 \wedge dx_4$ болсо, анда $\omega \wedge \omega = 2x_1 x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$ келип чыгат.

§19. Дифференциалдык формалардын үстүнөн жүргүзүлүүчү f^* оператору

$f: R^n \to R^m$ дифференцирленүүчү чагылтуусун карайлы. Бул чагылтуу R^m мейкиндигиндеги ар бир k - форманы R^n мейкиндигинен алынган анык бир k - формага тиешелеш кое тургандай f^* чагылтуусун жаратат.

$\omega - R^m$ мейкиндигиндеги k - форма болсун. Анда $f^*(\omega) - R^n$ мейкиндигиндеги k - форма болот жана

$$f^*(\omega)(P)(\vartheta_1, \dots, \vartheta_k) = \omega(df_P(\vartheta_1)), \dots, df_P(\vartheta_k)).$$

Мында $P(p_1, \dots, p_n) \in R^n$, $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k \in R_P^n$, $df_P : R_p^n \to R_{f(P)}^m$ – f чагылтуусунун P чекитиндеги дифференциалы.

Эгерде g – 0 - форма (б.а. дифференцирленүүчү функция) болсо, анда $f^*(g) = g \circ f$ деп шарт кылабыз.

Дифференциалдык формалардын үстүнөн жүргүзүлүүчү f^* оператору "өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу" менен эквиваленттүү экендигин кийинчерээк көрсөтөбүз. Ага чейин f^* операторунун кээ бир касиеттерин карайлы.

Теорема 3.3. $f: R^n \to R^m$ дифференцирленүүчү чагылтуу, $\omega, \varphi -$ R^m мейкиндигиндеги k - формалар, ал эми $g: R^m \to R^n$ - R^m мейкиндигиндеги аныкталган 0 - форма болсун. Анда төмөндөгүлөр орун алат:

а) $f^*(\omega+\varphi)=f^*\omega+f^*\varphi$;

б) $f^*(g\omega)=f^*(g)f^*\omega$;

в) Эгерде $\varphi_1,\ldots,\varphi_k - R^m$ деги 1- формалар болушса, анда

$$f^*(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k)=f^*(\varphi_1)\wedge\ldots\wedge f^*(\varphi_k).$$

Далилдөө . а) $P(p_1,\ldots,p_k)\in R^n$, $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_k\in R^n_P$ болсун. Анда

$$\begin{aligned} f^*(\omega+\varphi)(P)(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_k) &= (\omega+\varphi)(f(P))(df_P(\vartheta_1),\ldots,df_P(\vartheta_k))= \\ &= \left(f^*\omega\right)(P)(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_k)+\left(f^*\varphi\right)(P)(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_k)= \\ &= \left(f^*\omega+f^*\varphi\right)(P)(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_k). \end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned} f^*(g\omega)(P)(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_k) &= (g\omega)(f(P))(df_P(\vartheta_1),\ldots,df_P(\vartheta_k)) \\ &= (g\circ f)(P), \end{aligned}$$

$$f^*\omega(P)(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_k)=f^*g(P)\cdot f^*\omega(P)(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_k).$$

в) P чекитинин белгилөөсүн эске албай (жазбай) койсок

$$\begin{aligned} f^*(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k)(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_k) &= (\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k)(df(\vartheta_1),\ldots,df(\vartheta_k))= \\ det(\varphi_i(df(\vartheta_j)))det\left(f^*\varphi_i(\vartheta_j)\right) &= \left(f^*\varphi_1\wedge\ldots\wedge f^*\varphi_k\right)(\vartheta_1,\ldots\vartheta_k). \end{aligned}$$

Теорема далилденди.

Эскертүү 3.3. Биз кийинчерээк бул теореманын (в) шарты k - формалар үчүн да орун ала тургандыгын (теорема 4) далилдейбиз.

Эми болсо мурда убада берген f^* операторунун интерпретациясын (б.а. анын “өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу” менен эквиваленттүү экендигин) көрсөтөлү.

$(x_1,...,x_n)-$ R^n мейкиндигиндеги координаталар, $(y_1,...,y_m)-$ R^m мейкиндигиндеги координаталар болсун. Анда $f: R^n \to R^m$ чагылтуусу төмөндөгүдөй барабардыктар менен аныкталат:

$$y_1 = f_1(x_1,...,x_n),....,y_m = f_m(x_1,...,x_n) \qquad (*)$$

R^m мейкиндигинде аныкталган $\omega = \sum\limits_I a_I dy_I$ k - формасын алалы. f^* операторунун жогорудагы касиеттеринен пайдаланып төмөндөгүнү алабыз:

$$f^*\omega = \sum_I f^*(a_I)(f^*dy_{i_1})\wedge...\wedge(f^*dy_{i_k}).$$

Эми $(f^*dy_i)(\vartheta) = dy_i(df(\vartheta)) = d(y_i \circ f)(\vartheta) = df_i(\vartheta)$ экендигин эске алсак, анда

$$f^*\omega = \sum_I a_I(f_1(x_1,...,x_n),....,f_m(x_1,...,x_n))df_{i_1}\wedge...\wedge df_{i_k},$$

мында f_i жана df_i – x_j лардан көз каранды функциялар. Ошентип, f^* ны ω формасына колдонуу ω формасындагы y_i өзгөрүлмөлөрүн жана алардын дифференциалдарын x_k жана dx_k функцияларына “алмаштыруу” болуп эсептелет экен.

Эскертүү 3.4.: Кээ бир учурларда бүтүндөй R^n мейкиндигинде аныкталган дифференциалдык формаларды эмес, кандайдыр бир $U \subset R^n$ ачык көптүгүндө гана аныкталган дифференциалдык формаларды колдонуу ыңгайлуу болот.

Мисал. ω аркылуу $R^2 = R \times R$ тегиздигиндеги 1- форманы белгилейли:

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$$

U аркылуу (r,θ) тегиздигиндеги төмөндөгүдөй көптүктү белгилейли:

$$U = \{(r,\theta) / r > 0 , 0 < \theta < 2\pi\},$$

$f: U \to R^2$ чагылтуусун төмөндөгүдөй аныктайлы:

$$f(r,\theta) = \begin{cases} x = r\,cos\,\theta , \\ y = r\,sin\,\theta . \end{cases}$$

Эми $f^*\omega$ ны табалы

$$dx = cos\,\theta\, dr - r\,sin\,\theta\, d\theta ,$$
$$dy = sin\,\theta\, dr + r\,cos\,\theta\, d\theta ,$$

болгондуктан

$$f^{*}\omega=-\frac{r\,sin\theta}{r^{2}}\left(cos\theta\,dr-r\,sin\theta\,d\theta\right)+$$

$$+\frac{r\,cos\theta}{r^{2}}\left(sin\theta\,dr+r\,cos\theta\,d\theta\right)=d\theta,$$

$$f^{*}\omega=-\frac{sin\theta}{r}\left(cos\theta\,dr-r\,sin\theta\,d\theta\right)+$$

$$+\frac{cos\theta}{r}\left(sin\theta\,dr+r\,cos\theta\,d\theta\right)=d\theta.$$

Теорема 3.4: Эгерде $f:\ R^{n}\to R^{n}$ дифференцирленүүчү чагылтуу болсо, анда төмөндөгүлөр орун алат:

а) $f^{*}(\omega\wedge\varphi)=\left(f^{*}\omega\right)\wedge\left(f^{*}\varphi\right)$, мында

$\omega,\varphi-\ R^{m}$ мейкиндигиндеги дифференциалдык формалар;

б) $(f\circ g)^{*}\omega=g^{*}\left(f^{*}\omega\right)$, мында

$g:\ \ R^{p}\to R^{n}$ – дифференцирленүүчү чагылтуу.

Далилдөө. Каалагандай $(x_{1},x_{2},...,x_{n})\in R^{n}$ үчүн

$$(y_{1},y_{2},...,y_{m})=(f_{1}(x_{1},...,x_{n}),...,f_{m}(x_{1},...,x_{n}))\in R^{m}$$

деп алалы. Ал эми

$$\omega=\sum_{I}a_{I}dy_{I}\,,\ \varphi=\sum_{J}в_{J}dy_{J}$$

R^m мейкиндигиндеги дифференциалдык формалар болушсун. Анда

$$a)\ f^*(\omega\wedge\varphi)=f^*\left(\sum_{IJ}a_I в_J dy_I\wedge dy_J\right)=$$

$$=\sum_{IJ}a_I(f_1,\ldots,f_m)в_J(f_1,\ldots,f_m)df_I\wedge df_J=$$

$$=\sum_{I}a_I(f_1,\ldots,f_m)df_I\wedge\sum_{J}в_J(f_1,\ldots,f_m)df_J=f^*\omega\wedge f^*\varphi,$$

$$б)(f\circ g)^*\omega=\sum_{I}a_I((f\circ g)_1,\ldots,(f\circ g)_m)d(f\circ g)_I=$$

$$=\sum_{I}a_I(f_1(g_1,\ldots,g_n),\ldots,f_m(g_1,\ldots,g_n))df_I(dg_1,\ldots,dg_n)=$$

$$=g^*\left(f^*(\omega)\right).$$

Эми кадимки функцияларды дифференцирлөө амалын дифференциалдык формаларга жалпылайбыз.

$g\colon R^n\to R$ 0- форма, б.а. дифференцирленүүчү функция болсун. Анда анын дифференциалы төмөндөгүдөй аныктала тургандыгын билебиз:

$$dg=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}dx_i.$$

dg – 1- форма болот экен. Бул процессти k - форманы

$(k+1)$ - формага өткөрө тургандай операторду аныктоо менен

жалпылайбыз.

Аныктоо. $\omega = \sum_I a_I dx_I$ – R^n мейкиндигиндеги k - форма болсун. Бул форманын ***сырткы дифференциалы*** деп төмөндөгүдөй аныкталган $(k+1)$ - форманы айтабыз:

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I .$$

Мисал. $\omega = xyz\,dx + yzdy + (x+z)dz$ болсун. Анда

$$\begin{aligned} d\omega &= d(xyz) \wedge dx + d(yz) \wedge dy + d(x+z) \wedge dz = \\ &= (yzdx + xzdy + xydz) \wedge dx + (zdy + ydz) \wedge dy + \\ &+ (dx + dz) \wedge dz = -xzdx \wedge dy + (1-xy)dx \wedge dz - ydy \wedge dz . \end{aligned}$$

ω – 1 - формасынын сырткы дифференциалы $d\omega$ – 2 - форма болот экен.

§20. R^3 мейкиндигиндеги дифференцирленүүчү көп түспөлдүүлүктөрдүн мисалдары

Жогоруда дифференциалдык формалар R^n мейкиндигиндеги объекттер катары аныкталган. Бирок, алар дифференцирленүүчү ар кандай башка объекттер катары табигый түрдө башка дифференцирленүүчү көп түспөлдүүлүктөрдө да жашашат. R^3 мейкиндигиндеги көп түспөлдүүлүк түшүнүгүн карайбыз. Ушул мейкиндиктеги регулярдык беттерди карайлы.

$S - R^3$ мейкиндигинин кандайдыр бир камтылуучу көптүгү болсун.

Аныктоо. Эгерде $\forall P(p_1, p_2, p_3) \in S$ үчүн бул чекиттин ушундай бир V чеке-бели жашап $\left(V \subset R^3\right)$ жана $f_\alpha : U_\alpha \to V \cap S$ $(U_2 \subset R^2$, U_α - ачык көптүк) чагылтуусу төмөндөгүдөй шарттарды канааттандырса:

1) f_α - дифференцирленүүчү гомеоморфизм;

2) $(df_\alpha)_q : T_q(U_\alpha) \to R^3$ чагылтуусу ар бир $q \in U_\alpha$ үчүн иньекция болсо, анда $S \subset R^3$ көптүгү ***регулярдык бет*** деп аталат.

$f_\alpha : U_\alpha \to S$ чагылтуусу P чекитинин чеке – белиндеги S бетинин параметризациясы деп аталат.

Эгерде $f_\alpha : U_\alpha \to S$ жана $f_\beta : U_\beta \to S$ параметризациялары

$$f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \otimes$$

шартын канааттандырышса, анда

$$f_\beta^{-1} \circ f_\alpha : \quad f_\alpha^{-1}(W) \to R^2,$$

$$f_\alpha^{-1} \circ f_\beta : f_\beta^{-1}(W) \to R^2$$

чагылтуулары дифференцирленүүчү болушат жана алар параметризацияны өзгөртүүлөр деп аталышат.

Демек, регулярдуу беттерде дифференцирленүүчү функциялар жөнүндө сөз кылууга жана аларга дифференциалдык эсептөөлөрдүн методдорун колдонууга боло тургандыгы келип чыгат.

1-мисал : $P^2(R)$ - чыныгы сандардын талаасынын үстүндө аныкталган (же жөн эле чыныгы) проективдүү тегиздикти белгилейли. Анын бир модели (же мисалы) катары R^3 мейкиндигиндеги бир эле $O(0,0,0)$ (координаталар башталышы) чекити аркылуу өтүүчү бардык түз сызыктардын көптүгүн алалы, б.а. $P^2(R)-R^3$ мейкиндигиндеги "багыттардын" көптүгү болсун. Бул көптүктө дифференцирленүүчү түзүлүштү аныктайлы.

Ал үчүн R^3 мейкиндигинин чекиттеринин арасында эквиваленттүүлүк катышын төмөндөгүдөй аныктайбыз:

$$(x,y,z)\sim(\lambda x,\lambda y,\lambda z),\;\; \lambda\in R,\;\; \lambda\neq 0.$$

Бул катыш R^3 мейкиндигин эквиваленттүүлүк класстарына бөлүктөйт, ар бир класс өз ара эквиваленттүү болушкан чекиттердин көптүгү болуп эсептелет. Мындай класстардын көптүгү фактор – көптүк деп аталаарын алгебра курсунан билебиз. Фактор – көптүктү $P^2(R)$ аркылуу, ал эми анын ар бир “чекитин” (эквиваленттүүлүк классты) $[x, y, z]$ көрүнүшүндө белгилейли.

Эми биз $V_1, V_2, V_3 \subset P^2(R)$ көптүктөрүн төмөндөгүдөй аныктайбыз:

$$V_1 = \{[x, y, z]; \;\; x \neq 0\},$$
$$V_2 = \{[x, y, z]; \;\; y \neq 0\},$$
$$V_3 = \{[x, y, z]; \;\; z \neq 0\}.$$

Анда $f_i : R^2 \to V_i \;\; (i = 1, 2, 3)$ чагылтуулары төмөндөгүдөй болушат:

$$f_1(u, \vartheta) = [1, u, \vartheta], \;\; f_2(u, \vartheta) = [u, 1, \vartheta], \; f_3(u, \vartheta) = [u, \vartheta, 1],$$

мында $(u, \vartheta) \in R^2$.

Геометриялык жактан V_2, мисал үчүн, R^3 мейкиндигиндеги $O(0,0,0)$ чекити аркылуу өтүп, бирок xOz тегиздигинде жатпаган түз сызыктардын көптүгү болот.

$\{(f_i, R^2)\}$ системасы $P^2(R)$ көптүгүндө аныкталган дифференцирленүүчү структура болот.

Ар бир $f_i \;(i = 1, 2, 3)$ чагылтуусу биекция болот жана

$$\underset{i}{U} f_i\left(R^2\right) = P^2(R).$$

Эми $f_i^{-1}\left(V_i \cap V_j\right)$ көптүктөрү R^2 де ачык көптүктөр экендиги жана $f_j^{-1} \circ f_i$ чагылтуулары дифференцирленүүчү экендигин көрсөтүү керек. $i = 1, \ j = 2$ учурун карайлы. Калган учурлар ушуга эле окшош болушат.

$\{(u, \vartheta), \ u \neq 0\}$ классынын, б.а. $f_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ көптүгүнүн касиеттери (u, ϑ) $(u \neq 0)$ көрүнүшүндө болушат. Демек, $f_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ көптүгү R^2 де ачык көптүк жана

$$\left(f_2^{-1} \circ f_1\right)(u, \vartheta) = f_2^{-1}(f_1(u, \vartheta)) = f_2^{-1}([1, u, \vartheta]) =$$
$$= f_2^{-1}\left(\left[\frac{1}{u}, 1, \frac{u}{\vartheta}\right]\right) = \left(\frac{1}{u}, \frac{\vartheta}{u}\right)$$

чагылтуусу дифференцирленүүчү болот.

Демек, $P^2(R)$ көптүгү дифференцирленүүчү көптүспөлдүүлүк экен.

2-мисал. Чыныгы проективдүү мейкиндикти карайлы:

$$\left\{(x_1, \ldots x_{n+1}) \in R^{n+1}\right\}.$$

Бул көптүктө эквиваленттүүлүк катышын жогорудагы 1-мисалдагыдай аныктайбыз:

$$(x_1,\dots,x_{n+1})\sim(\lambda x_1,\dots,\lambda x_{n+1}),\ \lambda\in R,\lambda\neq 0.$$

Жалаң ушундай (б.а. пропорциялаш $n+1$ даана чыныгы сандардын удаалаштыктарынын) элементтердин көптүктөрү эквиваленттүүлүк класстары болушат.

$R^{n+1}/_{\sim}=\{(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_{n+1})\}$ фактор-мейкиндиги n–ченемдүү чыныгы проективдүү мейкиндик болот жана аны $P^n(R)$ аркылуу белгилейли. Бул мейкиндиктин чекиттерин $[x_1,\dots,x_{n+1}]$ көрүнүшүндө белгилеп алабыз. Төмөндөгүдөй көптүктөрдү карайлы:

$$V_i=\{[x_1,\dots,x_{n+1}];\ x_i\neq 0\},\quad (i=1,2,\dots,n+1).$$

$f_i:\quad R^n\to V_i$ чагылтууларын төмөндөгүдөй аныктайбыз.

$$f_i(y_1,\dots,y_n)=[y_1,\dots,y_{i-1},1,y_i,\dots,y_n]\in V_i$$

$\{(f_i,R^n)\}$ системасы $P^n(R)$ мейкиндигинде аныкталган дифференцирленүүчү структура болот (1-мисалды карагыла). Демек, $P^n(R)$ мейкиндиги дифференцирленүүчү көп түспөлдүүлүк болот экен.

3 – мисал. (Клейндин бутылкасы)

R^4 мейкиндигинин төмөндөгүдөй камтылуучу көптүгүн карайлы. $Ox,Oy,Oz,O\omega$ – R^4 мейкиндигиндеги координаталык октор болсун. $S(C,r)$ айланасы xOz

тегиздигинде жатсын, C борбору Ox огунда жатып, $O(0,0,0,0)$ чекитинен $a>r$ аралыгында жайланышкан болсун: $C(a,0,0,0)$, $a>r$. Бул айлананы Oz огунун айланасында төмөндөгүдөй айландыралы: C борбору xOy тегиздигинде u бурчуна бурулганда, $S(C,r)$ айланасы жаткан xOz тегиздиги $(OC)(Oz)(O\omega)$ үч ченемдүү мейкиндигинде (OC) түз сызыгынын айланасында $\frac{u}{2}$ бурчуна бурулсун. U_1 аркылуу төмөндөгүдөй көптүктү белгилейли: $U_1 \subset R^2$,

$$U_1 = \{(u,\vartheta) \in R^2; 0 < u < 2\pi; 0 < \vartheta < 2\pi\}.$$

$f_1 : U_1 \to R^4$ чагылтуусун төмөндөгүдөй аныктайбыз:

$$f_1(u,\vartheta) = \begin{cases} x = (r\cos\vartheta + a)\cos u, \\ y = (r\cos\vartheta + a)\sin u, \\ z = r\sin\vartheta\cos(u/2), \\ \omega = r\sin\vartheta\sin(u/2). \end{cases}$$

$f_1(U_1)$ көптүгү Клейндин бутылкасынын чекиттерин кармап турат, бирок $u=0, \vartheta=0$ айланаларынын чекиттерин кармабайт. f_1 чагылтуусу биекция болот. $z \neq 0$ деп алалы, анда $\sin\vartheta \neq 0, \cos(u/2) \neq 0$. Бирок, $0 < u/2 < \pi$ болгондуктан, $\frac{\omega}{z} = tg\frac{u}{2}$ барабардыгынан u ну аныктоого болот. Андан кийин

$$\sin\vartheta = \frac{\omega}{r\sin\frac{u}{2}},\ \cos\vartheta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-a}{r}$$

формулаларынан ϑ ны табууга болот. Демек, эгерде $z \neq 0$ болсо, биздин ырастообуз туура экен. Эгерде $z = 0$ болсо, анда $\vartheta = \pi$ же $u = \pi$ болот жана f_1 биекция экендиги келип чыгат. Демек R^2 де $O(0,0)$ чекитин өзгөртүү менен жогорудагыга окшош чагылтуулардагы элестердин жардамы менен Клейндин бутылкасын толук каптоого болот экен.

Мисалы, $f_2 \colon U_2 \to R^4$ чагылтуусун төмөндөгүдөй аныктайлы:

$$x = -(r\cos\overline{\vartheta} + a)\sin\overline{u},$$

$$y = (r\cos\overline{\vartheta} + a)\cos\overline{u},$$

$$z = r\sin\overline{\vartheta}\cos\left(\frac{\overline{u}}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\omega = r\sin\overline{\vartheta}\sin\left(\frac{\overline{u}}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$(\overline{u}, \overline{\vartheta}) \in U_2$$

(геометриялык жактан $\overline{u} - Oy$ огундагы бирдик). $f_2(U_2)$ көптүгү Клейндин бутылкасынын $u = 0$ болгон чекиттерин кармап турат.

f_2 – биекция экендигин жеңил эле көрсөтүүгө болот.

$f_1(U_1)\cap f_2(U_2)=W$ - байланыштуу эмес, бирок эки байланыштуу компонентадан турат:

$$W_1=\left\{f_1(u,\vartheta);\quad \frac{\pi}{2}<u<2\pi\right\},$$

$$W_2=\left\{f_1(u,\vartheta);\quad 0<u<\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Координаталарды өзгөртүү төмөндөгүдөй аныкталат:

$$f_2^{-1}\circ f_1:\quad \begin{cases}\overline{u}=u-\dfrac{\pi}{2},\\ \overline{\vartheta}=\vartheta,\end{cases}\qquad (W_1 \text{ көптүгүндө})$$

$$f_2^{-1}\circ f_1:\quad \begin{cases}\overline{u}=u+\dfrac{3\pi}{2},\\ \overline{\vartheta}=2\pi-\vartheta.\end{cases}\qquad (W_2 \text{ көптүгүндө})$$

Бул функциялар дифференцирленүүчү экендиги көрүнүп турат.

Адабияттар

1. Базылев В.Т. Материалы по геометрии. М., 1978, вып.I, 1979, вып.2
2. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия. М., 1974, т.I, 1975, т.II
3. Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия мгообразий. М.1967
4. Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводки результатов. М., 1975
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. основы дифференциальной геометрии. М., 1981, том I, II
6. Лихнерович А. Теория связности в целом и группы голономии. М., 1960
7. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. М., 1972
8. Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М., 1972
9. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М., 1948
10. Лаптев Г.В. Труды Московского математического общества. М., 1953, т. II. Итоги науки. Геометрия. М., 1965; Труды геометрического общества. М., 1966, т.I, 1969, т. II; 1971, т.III
11. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М., 1970
12. Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия. М., 1960

Мазмуну